# ¿Cuándo un grupo paratopológico (semitopológico) es un grupo topológico?

**Kenni Alondra Sánchez Flores** [1] Gerardo Delgadillo Piñón [1]

[1]**Universidad Juárez Autónoma de Tabasco**, División Académica de Ciencias Básicas.

## Antecedentes

Históricamente, diversos autores han estudiado las condiciones suficientes para que un grupo paratopológico o semitopológico sea un grupo topológico. En 1936, Montgomery probó que todo grupo semitopológico separable que es completamente metrizable es un grupo topológico [5]. Posteriormente, en 1957, Ellis demostró que cada grupo semitopológico localmente compacto Hausdorff es un grupo topológico [3]. Por su parte, en 1960, Żelazko probó que cada grupo semitopológico completamente metrizable es un grupo topológico [10]. Asimismo, Bouziad demostró que cada grupo semitopológico Čech-completo es un grupo topológico [2]. En 2007, M. Sanchis y M. G. Tkachenko mostraron que cada P-grupo paratopológico Hausdorff Lindelöf es un grupo topológico [8]. Más adelante, en 2013, I. Sánchez debilitó la condición de espacio de Hausdorff a $\mathbf{T}_1$ [7]. Por otro lado, en 2010, Ravsky probó que todo grupo paratopológico 2-pseudocompacto de pseudocarácter numerable es un grupo topológico [6]. Estos resultados evidencian el interés de la pregunta planteada y motivan su estudio.

### Definición 1 (Grupo Topológico)

Sea $G$ un conjunto no vacío con una operación binaria $\cdot$ y una familia $\tau$ de subconjuntos de $G$. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ se llama **grupo topológico** si:

1. $(G, \cdot)$ es un grupo.
2. $(G, \tau)$ es un espacio topológico.
3. Las funciones $g_1 : (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ y $g_2 : (G,\tau) \to (G,\tau)$ definidas por $g_1(x, y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, donde $x^{-1}$ es el inverso de $x$.

**Ejemplo 1:** Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si consideramos a $T$ con el producto de números complejos y la topología natural inducida de $\mathbb{C}$. Entonces, $T$ con estas dos estructuras es un grupo topológico.

### Definición 2 (Grupo Paratopológico)

Sea $G$ un conjunto no vacío con una operación binaria $\cdot$ y una familia $\tau$ de subconjuntos de $G$. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ se llama **grupo paratopológico** si:

1. $(G, \cdot)$ es un grupo.
2. $(G, \tau)$ es un espacio topológico.
3. La función $g_1 : (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ dada por $g_1(x, y) = x \cdot y$ es continua.

**Teorema 1**

*Todo grupo topológico es un grupo paratopológico.*

El siguiente ejemplo muestra que la implicación inversa no es siempre cierta.

**Ejemplo 2: La recta de Sorgenfrey**

Consideremos la familia $\beta = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces $\beta$ es base para una topología $\tau_S$ en $\mathbb{R}$. A la pareja $S = (\mathbb{R}, \tau_S)$ se le conoce como la recta de Sorgenfrey. Equipándola con la suma en los reales, tenemos que es un grupo paratopológico. Probemos que $g_2 : S \to S$, dada por $g_2(x) = -x$, no es continua. En efecto, sea $[a, b) \in \beta \subset \tau_S$ con $0 < a < b$. Entonces $[a, b) \in \tau_S$. Luego, $g_2^{-1}([a, b)) = (-b, -a] \notin \tau_S$.

**Teorema 2**

*Sea $G$ un grupo paratopológico Hausdorff. Si $G$ es compacto, entonces la función $g_2 : G \to G$ dada por $g_2(x) = x^{-1}$ es continua; es decir, $G$ es un grupo topológico.*

*Demostración.* Sea $F \subseteq G$ cerrado. Consideremos el conjunto $g_2^{-1}(F) = \{x \in G : g_2(x) \in F\}$ y veamos que $g_2^{-1}(F)$ es cerrado en $G$. Para esto, sea $M = \{(x, y) \in G \times G : x \cdot y = e\}$ donde $e$ es la unidad de $G$. Como $G$ es Hausdorff y las funciones $g_1 : G \times G \to G$ y $f : G \times G \to G$ dadas por $g_1(x, y) = x \cdot y$ y $f(x, y) = e$ son continuas, se sigue que $M$ es cerrado en $G \times G$. Definamos el conjunto $P = (G \times F) \cap M$, entonces $P$ es cerrado por ser la intersección de conjuntos cerrados. Consideremos ahora la función proyección $\pi_1 : G \times G \to G$, con $\pi_1(x, y) = x$. Observemos que $\pi_1(P) = \{x \in G : x = y^{-1} \text{ y } y \in F\}$. Luego, $\pi_1(P) = g_2^{-1}(F)$. Dado que $G$ es compacto y Hausdorff, se sigue que la función $\pi_1$ es cerrada. De este modo, $g_2$ es una función continua y $G$ es un grupo topológico. ■

### Definición 3 (Grupo Semitopológico)

Sea $G$ un conjunto no vacío con una operación binaria $\cdot$ y una familia $\tau$ de subconjuntos de $G$. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ es un **grupo semitopológico** si:

1. $(G, \cdot)$ es un grupo.
2. $(G, \tau)$ es un espacio topológico.
3. Las translaciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$ determinadas por $L_a(x) = a \cdot x$ y $R_a(x) = x \cdot a$ son continuas.

**Teorema 3**

*Todo grupo paratopológico es un grupo semitopológico.*

El siguiente ejemplo evidencia que no todo grupo semitopológico es paratopológico.

**Ejemplo 3**

Sea $G = (\mathbb{R}, +, \tau_c)$, donde $\tau_c = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Tenemos que $G$ es un grupo semitopológico. Veamos que $g_1(x, y) = x + y$ no es continua. Sea $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ un abierto en $G$. Probemos que $g_1^{-1}(U) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\}$ no es abierto. En efecto, sea $(1, 0) \in g_1^{-1}(U)$ y $V \times W$ una vecindad abierta de $(1, 0)$. Entonces $A = (V \times W) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\} \neq \emptyset$. Luego, $(1, 0)$ no es un punto interior de $g_1^{-1}(U)$.

Por lo que se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

Grupo Topológico $\Rightarrow$ Grupo Paratopológico $\Rightarrow$ Grupo Semitopológico

El Teorema de Ellis es uno de los resultados más fundamentales en la teoría de estructuras topológico-algebraicas.

**Teorema 4 (Teorema de Ellis)**

*Sea $G$ un grupo semitopológico Hausdorff. Si $G$ es localmente compacto, entonces $G$ es un grupo topológico.*

La demostración se basa en los siguientes lemas:

**Lema 1**

Sea $G$ un grupo semitopológico localmente compacto y $\mathbf{T_2}$. Sea $K \subseteq G$ un subespacio compacto y Hausdorff. Considere $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ una cubierta abierta finita de $K$. Para cada $x \in G$ y $U \in \mathcal{U}$, definimos el conjunto:

$$F(x, U) = \{y \in K : x \cdot y \notin U\} = K \setminus L_x^{-1}(U).$$

Si la familia de cerrados $\mathcal{F} = \{F(x, U) : x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ no satisface la Propiedad de la Intersección Finita en $K$, entonces existe al menos un par $(a, b) \in G \times K$ en el cual la función $g_1$ es continua.

**Lema 2**

Bajo las mismas hipótesis del **Lema 1**, definimos para cada $U \in \mathcal{U}$ el conjunto:

$$E_U = \{y \in K : \exists A \subseteq G \text{ abierto no vacío y } \exists B \subseteq K \text{ abierto no vacío con } y \in B \text{ tal que } A \cdot B \subseteq U\}$$

Entonces existe al menos un índice $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\operatorname{Int}_K\left(\overline{E_{U_k}}^K\right) \neq \emptyset$.

**Lema 3**

Sea $G$ un grupo semitopológico. Si la función multiplicación $g_1 : G \times G \to G$ es continua en un punto $(a, b) \in G \times G$, entonces $g_1$ es continua en todo punto $(x, y) \in G \times G$.

## Referencias

[1] Arhangel'skii, A. and Tkachenko, M. G. *Topological Groups and Related Structures: An Introduction to Topological Algebra*. France: Atlantis Press, 2008.

[2] Bouziad, A. "Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group". In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), pp. 953–959.

[3] Ellis, R. "Locally compact transformation groups". In: *Duke Math. J.* 24 (1957), pp. 119–125.

[4] Hernández Arzusa, J. C. *Una introducción a grupos y semigrupos topológicos*. Cartagena: Editorial Universitaria, 2023.

[5] Montgomery, D. "Continuity in Topological Groups". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 42.12 (1936), pp. 879–882.

[6] Ravsky, O. V. *(2-)Pseudocompact paratopological groups that are topological*. http://arxiv.org/abs/1003.5343. 2010.

[7] Sánchez, I. "Grupos Paratopológicos". Tesis doctoral. México: Universidad Autónoma Metropolitana, 2013.

[8] Sanchis, M. and Tkachenko, M. G. "Totally Lindelöf and totally $\omega$-narrow paratopological groups". In: *Topology Appl.* 155 (2007), pp. 322–334.

[9] Tkachenko, M. G. et al. *Grupos Topológicos*. México: Universidad Autónoma Metropolitana, 1997.

[10] Żelazko, W. "A theorem on $B_0$ division algebras". In: *Bull. Acad. Pol. Sci.* 8 (1960), pp. 373–375.



kenni.sanchezf@gmail.com gerapinon42@gmail.com