Teoría del grado de Brouwer aplicada a la teoría del punto fijo

Marco Antonio Mendoza Cayetano

Licenciatura en Matemáticas

Universidad Veracruzana

Coautores: Dr. Carlos Alberto Hernández Linares, Mtra. Zenaida Ávila Aguilar, Dr. Raquiel Rufino López Martínez

Introducción

El problema fundamental de determinar el número de soluciones de una ecuación no lineal en un dominio acotado tiene antecedentes históricos en los trabajos de Cauchy, Sturm, Gauss y Kronecker. A partir del principio del argumento de Cauchy y del teorema de ceros de Sturm, esta problemática evolucionó hacia la **Teoría del Grado de Mapeos**.

El **grado de Brouwer**, denotado por $d[f, \Omega, p]$, es un invariante topológico entero que recuenta algebraicamente —tomando en cuenta la orientación y el signo— el número de soluciones de la ecuación $f(x) = p$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si dicho grado es no nulo, se garantiza la existencia de al menos una solución en Ω. En este trabajo presentamos la construcción analítica elemental introducida por Erhard Heinz (1959).

Pero a todo esto, ¿a qué nos referimos cuando decimos *«el grado de Brouwer de una función»*? El **grado de Brouwer** $d[f, \Omega, p]$ es un entero que indica cuántas veces f cubre a p, teniendo en cuenta la orientación dentro del dominio Ω. Es un invariante topológico que garantiza la existencia de soluciones cuando es distinto de cero.

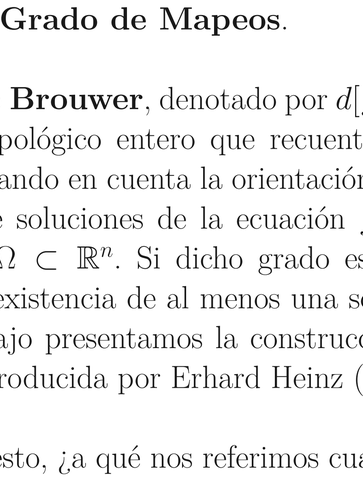


Figura 1. Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

Siguiendo este camino, se construye una ruta analítica equivalente a la que siguió Heinz para la teoría del grado topológico en dimensión finita.

Objetivos

El objetivo de este trabajo es desarrollar formalmente la teoría del grado topológico en dimensión finita mediante el enfoque analítico de Heinz (1959). Se demuestra que el grado $d[y, \Omega, z]$ está bien definido y es independiente de la función de prueba suavizadora Φ.

Finalmente, se utilizan sus propiedades de invarianza por homotopía y escisión para proporcionar demostraciones directas del **Teorema de Kronecker** y del **Teorema del Punto Fijo de Brouwer** que afirma que *toda función continua de un conjunto convexo y compacto en sí mismo tiene al menos un punto fijo.*

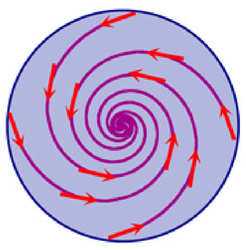


Figura 2. Representación en el plano.

Un punto fijo es un elemento que satisface que $f(x) = x$, entonces una manera de interpretarlo sería la siguiente: si nosotros dibujásemos un círculo en la arena y moviéramos con la palma de nuestra mano la arena dentro del círculo, habría por lo menos un granito que se quedó exactamente en el mismo lugar.

Construcción analítica del grado de Brouwer

1. Funciones de prueba suavizadoras (C^∞): Se garantiza la existencia de funciones de prueba $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, con soporte en (r_0, ϵ) donde $0 < r_0 < \epsilon < \min_{x \in \partial\Omega} \|y(x) - z\|$, tales que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\|x\|) dx = 1$.

El conjunto de las funciones Φ que satisfacen las condiciones anteriores es distinta del vacío, para ello primero se define una función que sea no negativa en el intervalo (-1,1) y se anule en cualquier otro punto y sea de clase C^∞, un ejemplo sería la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & \text{si } |x| < 1; \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Dicha función se puede ilustrar de la siguiente forma:

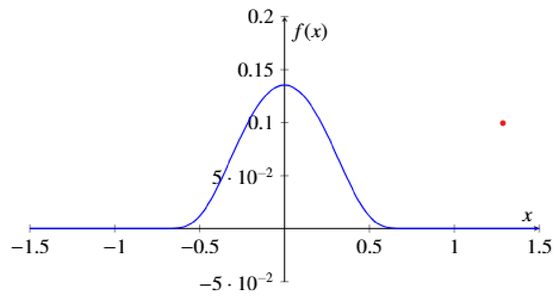


Figura 3. Ejemplo de la función de clase C^∞.

Después trasladamos y normalizamos esta función para que $f(x) = 0$ para $x \in [0, \delta]$ y $f(x) = 1$ para $x \in [\epsilon, +\infty)$, de modo que obtenemos la nueva función g dada por:

$$g(x) = f\left(\frac{\epsilon}{\epsilon - \delta}(x - \delta)\right),$$

Finalmente, la función final puede verse de la siguiente forma:

$$\psi(r) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{r - r_0} - \frac{1}{\varepsilon - r}\right) & \text{si } r \in (r_0, \varepsilon); \\ 0 & \text{, en otro caso.} \end{cases}$$

2. Definición para mapeos de clase C^1: Para $y \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $z \notin y(\partial\Omega)$, el grado se define mediante la integral:

$$d[y, \Omega, z] := \int_\Omega \Phi(\|y(x) - z\|) J[y(x)]\, dx$$

Mediante identidades de divergencia nula sobre los cofactores del Jacobiano ($\sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = 0$), se prueba que esta integral no depende de la función Φ elegida.

3. Equivalencia del grado Sean $y_1 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $y_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dos funciones tales que $y_i \in C^\infty(\Omega)$ para $i = 1, 2$ y ambas son continuas en $\overline{\Omega}$ y se cumple que:

1. $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$.
2. $||y_1(x) - y_2(x)|| < \epsilon_1$ para todo $x \in \Omega$.
3. $\exists z \in \mathbb{R}^n$ tal que $||y_i(x) - z|| > \epsilon_2 > 0, \forall x \in \partial\Omega$.

Entonces $d[y_1(x); \Omega, z] = d[y_2(x); \Omega, z]$.

4. Extensión a funciones continuas $C(\overline{\Omega})$: Si $y \in C(\overline{\Omega})$, utilizando el Teorema de Aproximación de Weierstrass, elegimos una sucesión de polinomios $\{y_k\} \subset C^1(\Omega)$ que converge uniformemente a y en $\overline{\Omega}$. Se demuestra que el siguiente límite existe y es independiente de la sucesión elegida:

$$d[y, \Omega, z] := \lim_{k \to \infty} d[y_k, \Omega, z].$$

5. Depende únicamente de valores en la frontera: Sea Ω un conjunto abierto acotado no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $y, \hat{y} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continuas. Si $y(x) = \hat{y}(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces para cualquier $z \notin y(\partial\Omega)$ se tiene $d[y(x); \Omega, z] = d[\hat{y}(x); \Omega, z]$.

Aplicaciones

La teoría del grado se ha estudiado para probar que teoremas complicados de demostrar (como los que enunciaremos a continuación) pueden resolverse con unos cuantos enunciados, así entonces, estos son algunos de los teoremas más importantes probados de forma más práctica:

- **Teorema de Kronecker.** Sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y $z \notin f(\partial\Omega)$. Si $d[f, \Omega, z] \neq 0$, entonces la ecuación $f(x) = z$ tiene al menos una solución en Ω.
- **Teorema de *punto fijo* de Brouwer.** Sea $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo.

Conclusiones

- La construcción analítica de Heinz permite estructurar la Teoría del Grado Topológico evitando las herramientas complejas de la topología combinatoria o algebraica clásica.
- Propiedades fundamentales como la invarianza por homotopía, la propiedad de escisión y la aditividad del grado simplifican significativamente la demostración de teoremas de existencia de soluciones no lineales.
- Se estableció de forma rigurosa la conexión directa entre el grado topológico y los teoremas de punto fijo, demostrando la potencia del análisis matemático elemental en la solución de problemas topológicos continentales.
- Cabe destacar que la teoría del grado de Brouwer y la teoría del punto fijo están íntimamente ligadas pues no se puede hablar de una sin recurrir a la otra, nos dimos a la tarea de mostrar cómo se conectan mediante teoremas, construcciones analíticas y herramientas del análisis clásico.

Referencias

[1] P. V. Subrahmanyam. *Elementary Fixed Point Theorems*. Springer, 2018.

[2] Cho, Y. J., & Chen, Y. *Topological Degree Theory and Applications*. CRC Press, 2006.

[3] Heinz, E. *An elementary analytic theory of the degree of mapping in n-dimensional space*. J. Math. Mech., 1959.

[4] Amster, Pablo. *Métodos topológicos en el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales*. Paphiros, 2021.

[5] Cioranescu, I. *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*. Springer, 1990.

LaTeX TikZposter