¿Qué es un esquema afín?

Rafael Villar Alvarez

Asesor: Carlos Ariel Pompeyo Gutiérrez

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas

Introducción

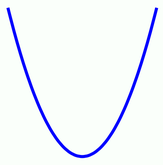
El concepto de **esquema afín** es muy importante para la Geometría Algebraica moderna, el cual abstrae una idea sencilla: por medio de objetos *algebraicos*, describir la *geometría* de figuras familiares como por ejemplo *puntos*, *rectas*, *parábolas*, *superficies cuadráticas* y muchas otras. El presente cartel pretende explicar qué es un esquema afín de manera intuitiva y constructiva.

El origen del problema

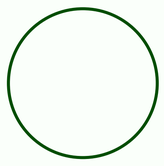
El problema que nos guía es:

¿Cómo podemos estudiar las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales?

En el plano y espacio, representados por $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, podemos formar diversos objetos geométricos los cuales surgen como el conjunto de soluciones de una o más ecuaciones polinomiales. A continuación vemos algunos ejemplos:



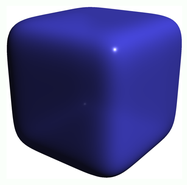
$Y - X^2 = 0$



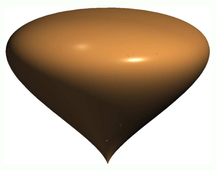
$X^2 + Y^2 - 1 = 0$



$X - Y = 0$



$X^6 + Y^6 + Z^6 - 1 = 0$



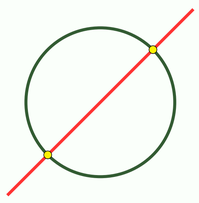
$X^2 + Y^2 - 4Z^3(1 - Z) = 0$

Ejemplo: Consideremos el polinomio $f(X, Y) = X^2+Y^2-1$. La circunferencia unitaria con centro en el origen está determinada por la ecuación $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ ya que puede expresarse como el conjunto de ceros:

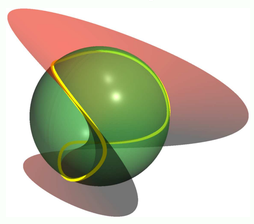
$$V(X^2 + Y^2 - 1) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, b) = 0\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 - 1 = 0\}.$$

El conjunto de soluciones de un *sistema de ecuaciones* se puede interpretar como una intersección de conjuntos de ceros:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 - 1 & = 0 \\ X - Y & = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 & = 0 \\ X^2 - Z^2 - Y & = 0 \end{cases}$$



Conexión con ideales

Considerando el *ideal* generado por los polinomios de un sistema de ecuaciones polinomiales, cualesquiera otros generadores de dicho ideal preservan las *soluciones* del sistema. Por ejemplo:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 - 4 & = 0 \\ X - Y & = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} X^2 - 2 & = 0 \\ X - Y & = 0 \end{cases}$$

porque $\langle X^2 + Y^2 - 4, X - Y\rangle = \langle X^2 - 2, X - Y\rangle$. Como consecuencia,

$$V(X^2 + Y^2 - 4, X - Y) = V(X^2 - 2, X - Y).$$

Para estudiar las *soluciones de un sistema*, basta estudiar *el ideal generado por los polinomios* involucrados en el sistema.

Elementos involucrados

- **Un espacio ambiente:** El plano $\mathbb{R}^2$ o el espacio $\mathbb{R}^3$.
- **Un anillo de funciones:** Anillos como $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X, Y]$ y $\mathbb{R}[X, Y, Z]$, que definen *funciones polinomiales* definidas en el espacio ambiente, con valores en un campo.
- **Objetos geométricos:** Los conjuntos $V(f_1, \ldots, f_n)$ donde $f_1, \ldots, f_n$ son polinomios, nuestras figuras geométricas.

La abstracción

Desde el punto de vista clásico:

$$\text{Espacio ambiente} \longrightarrow \text{Un anillo de polinomios.}$$

En la teoría de esquemas afines invertimos el orden:

$$\text{Un anillo } R \longrightarrow \text{Un espacio ambiente adecuado.}$$

El anillo conmutativo con unitario R es arbitrario. Debemos pensar en sus elementos como *"funciones"* definidas en algún espacio ambiente.

El espectro de un anillo

Dado un anillo R, el *espacio ambiente* más adecuado para este anillo es el conjunto:

$$\operatorname{Spec}(R) = \{I \subset R \mid I \text{ es un ideal primo}\}.$$

Ejemplo: Si $R = \mathbb{R}[X]$, entonces el espectro de R es:

$$\operatorname{Spec}(R) = \{\langle 0\rangle\} \cup \{\langle X - \alpha\rangle \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle (X - \gamma)(X - \overline{\gamma})\rangle \mid \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\},$$

es decir, el *ideal cero*, los ideales principales generados por un *polinomio lineal* y los ideales principales generados por un *polinomio cuadrático irreducible*.

El espectro enriquece los espacios

Los esquemas afines *expanden* el espacio ambiente que se considera en el enfoque clásico, añadiendo puntos que no tienen interpretación en ese contexto.

Ejemplo: Sabemos que los ideales de $\mathbb{R}[X]$ de la forma $\langle X-\alpha\rangle$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ son primos. Hay un encaje:

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X])$$

dado por $\alpha \mapsto \langle X - \alpha\rangle$. No obstante, existen *puntos adicionales* que no corresponden a ningún número real, como por ejemplo:

$$\langle X^2 + 1\rangle,$$

lo cual es síntoma de que $\mathbb{R}$ *no* es un *campo algebraicamente cerrado*, como por ejemplo lo es $\mathbb{C}$.

¿Cómo evaluamos puntos del espectro?

Sea $f \in R$. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, entonces es un resultado clásico probar que:

$$\frac{R}{\mathfrak{p}} \text{ es un dominio entero.}$$

Definimos a $k(\mathfrak{p})$ como el *campo de fracciones* de $R/\mathfrak{p}$. La idea es considerar una asignación:

$$\mathfrak{p} \to f(\mathfrak{p}),$$

donde $f(\mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p})$ para cada $\mathfrak{p}$, en analogía con la evaluación de polinomios usual. Como $f \in R$ y $\mathfrak{p}$ es un ideal de R, podemos considerar:

$$f(\mathfrak{p}) = \frac{f + \mathfrak{p}}{1 + \mathfrak{p}} \in k(\mathfrak{p}).$$

A diferencia del caso clásico, los campos $k(\mathfrak{p})$ pueden variar de un punto a otro en $\operatorname{Spec}(R)$.

Ejemplo: En el caso de $R = \mathbb{R}[X]$, $f(\langle X - \alpha\rangle)$ coincide con $f(\alpha) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, $f(\langle X^2 + 1\rangle) \in \mathbb{C}$.

La topología de Zariski

Dado un ideal $I \subset R$, podemos formar conjuntos de ceros de manera análoga al enfoque clásico:

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid f(\mathfrak{p}) = 0 \ \ \forall f \in I\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}.$$

Estos conjuntos corresponden a nuestros *objetos geométricos* en $\operatorname{Spec}(R)$.

¿Cómo le damos una topología a Spec(R)? Declaramos como *conjuntos cerrados* a aquellos de la forma $V(I)$ para algún ideal $I \subset R$. Definiendo a $D(I) = R \setminus V(I)$, obtenemos la llamada *topología de Zariski*:

$$\tau_{\text{zar}} = \{D(I) \mid I \text{ es un ideal de } R\}.$$

No obstante, $(\operatorname{Spec}(R), \tau_{\text{zar}})$ por si solo no determina a R.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son campos, por lo cual sus *espectros* consisten de un solo punto. Solo existe una topología en un *conjunto unitario*, por lo que $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}) \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ como espacios topológicos. No obstante, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ no son anillos isomorfos.

La gavilla estructural

La gavilla estructural de $\operatorname{Spec}(R)$ se denota por $\mathscr{O}$ y a cada abierto $U \in \tau_{\text{zar}}$ le asigna un *anillo* conformado por funciones de la forma:

$$s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}},$$

donde $s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}}$, y s es localmente un cociente de elementos de R. Se pueden demostrar los siguientes *isomorfismos* de anillos:

$$\mathscr{O}(\operatorname{Spec}(R)) \cong R \quad \text{y} \quad \mathscr{O}(D(f)) \cong R_f.$$

Lo segundo nos dice intuitivamente que como en $D(f)$ la función f no se anula, sin ningún problema podemos considerar *funciones racionales* de la forma:

$$\frac{a}{f^n},$$

donde $a \in R$ y $n \in \mathbb{N}$.

Esquemas afines

Se puede probar que el anillo R está totalmente determinado por el par $(\operatorname{Spec}(R), \mathscr{O})$ que llamamos **esquema afín** del anillo R.

Ejemplo: Tenemos el par $(\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X]), \mathscr{O})$, donde $\mathscr{O}(\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X]) \cong \mathbb{R}[X]$, recuperando así el anillo con el que iniciamos la construcción.

Referencias

[1] David Eisenbud y Joe Harris. *The Geometry of Schemes*. Vol. 197. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000. ISBN: 0-387-98637-5.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Vol. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.