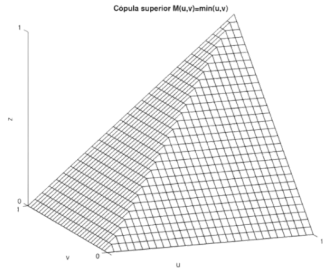
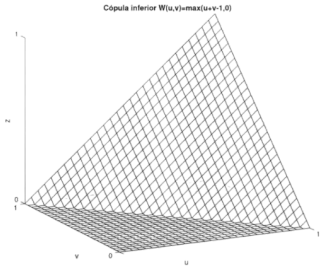
Cópulas: Midiendo la dependencia entre las variables



Aidé Primero Reyes

Dr. Enrique Espinoza Loyola

Septiembre de 2026

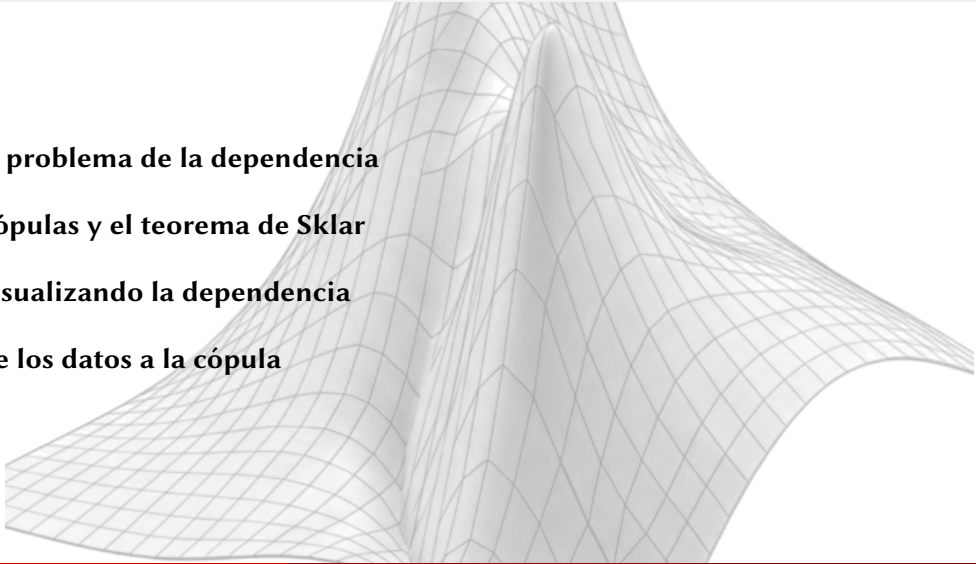


UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
NADA HUMANO ME ES AJENO

XIX FORO DE MATEMÁTICAS DEL SURESTE

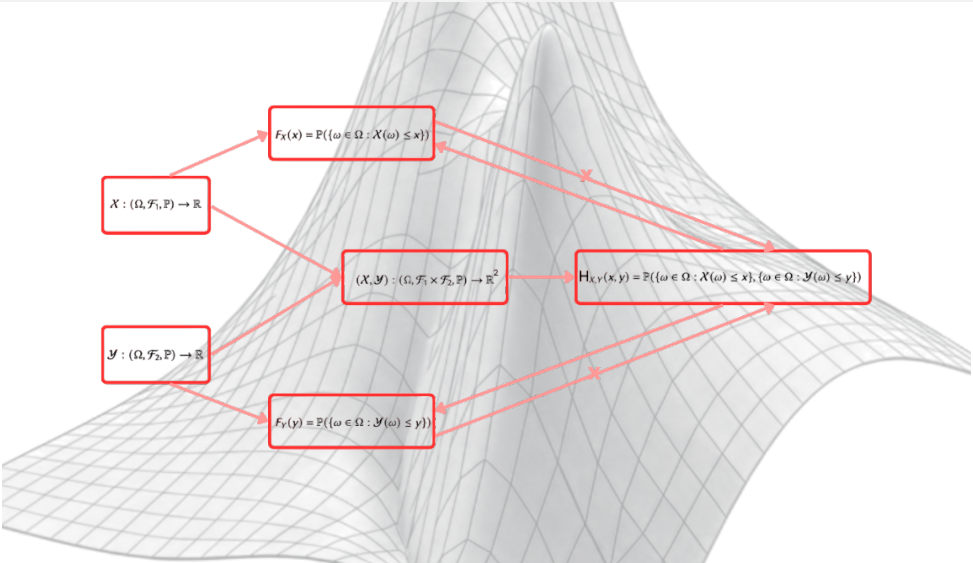
III SIMPOSIO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS

Contenido

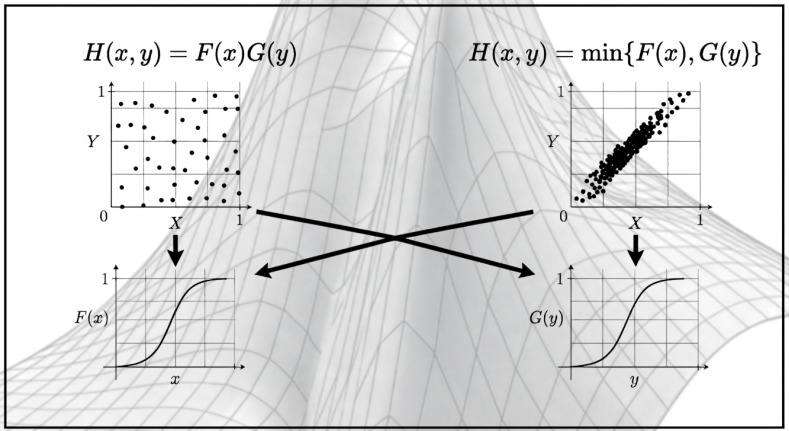


1. **El problema de la dependencia**
2. **Cópulas y el teorema de Sklar**
3. **Visualizando la dependencia**
4. **De los datos a la cópula**

Variables aleatorias

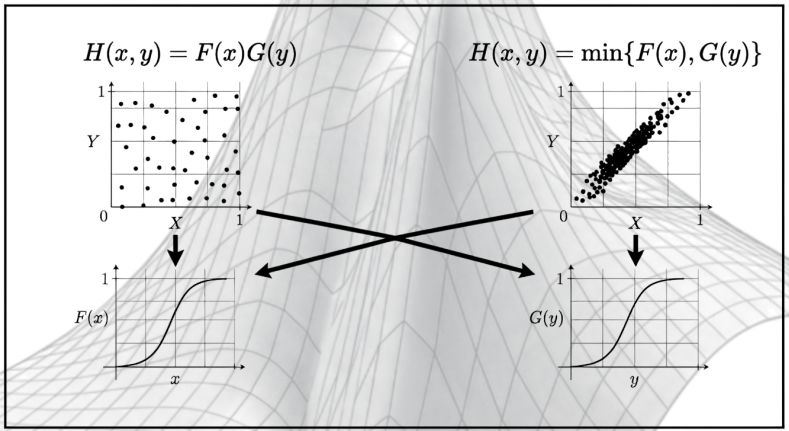


¿Qué nos falta?



La estructura de la dependencia entre las variables

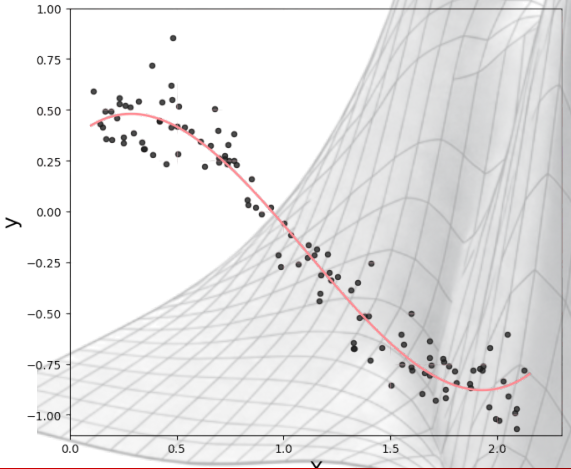
¿Qué nos falta?



La estructura de dependencia entre las variables

¿Qué entendemos por dependencia?

Por dependencia entendemos la situación en la que un elemento **no** puede existir, funcionar o desarrollarse por sí mismo, sino que su estado está determinado por lo que le suceda a otro.



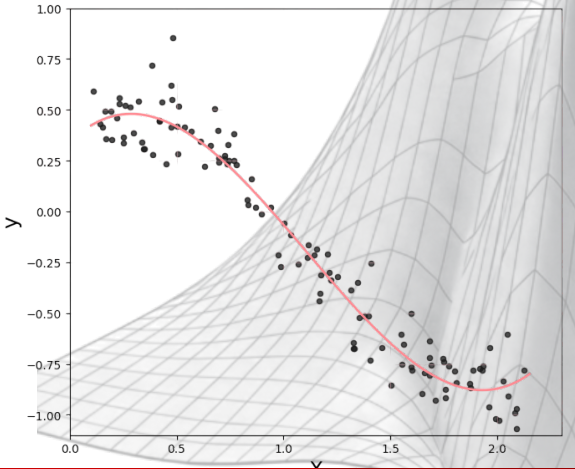
$$Y \neq f(X)$$

$$Y \neq f(X)$$

$$= f(X, w_1, w_2, \ldots)$$

¿Qué entendemos por dependencia?

Por dependencia entendemos la situación en la que un elemento **no** puede existir, funcionar o desarrollarse por sí mismo, sino que su estado está determinado por lo que le suceda a otro.



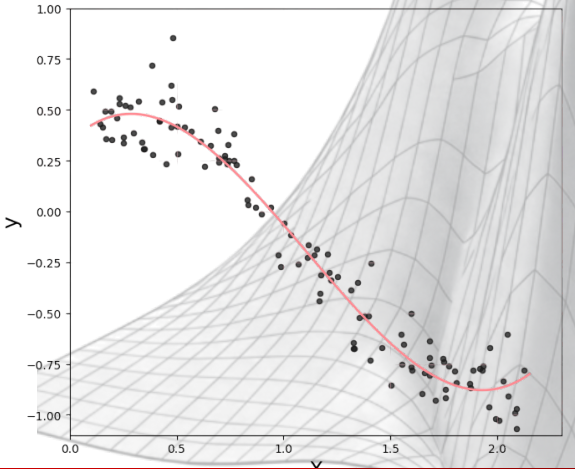
$$Y \neq f(X)$$

$$Y \approx f(X)$$

$$= f(X, w_1, w_2, \ldots)$$

¿Qué entendemos por dependencia?

Por dependencia entendemos la situación en la que un elemento **no** puede existir, funcionar o desarrollarse por sí mismo, sino que su estado está determinado por lo que le suceda a otro.

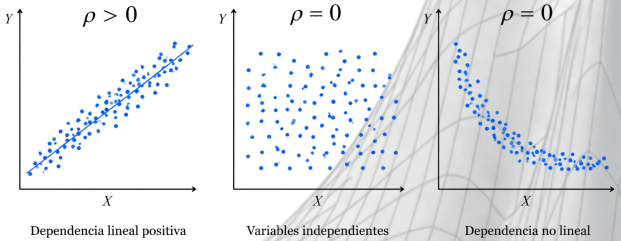


$$Y \neq f(X)$$

$$Y \approx f(X)$$

$$Y = \phi(X, w_1, w_2, ...)$$

¿Cómo medimos la dependencia entre variables aleatorias?



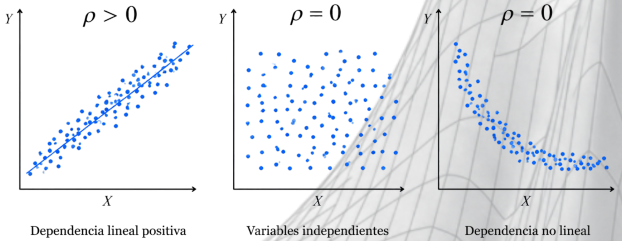
Dependencia lineal positiva | Variables independientes | Dependencia no lineal

- Correlación de Pearson.

La correlación de Pearson es una herramienta fundamental para medir **dependencia lineal**, pero es limitada: la dependencia, en general, no tiene por qué ser lineal.

Necesitamos herramientas que midan dependencias **no lineales** y que logren separar el comportamiento individual del comportamiento conjunto.

¿Cómo medimos la dependencia entre variables aleatorias?

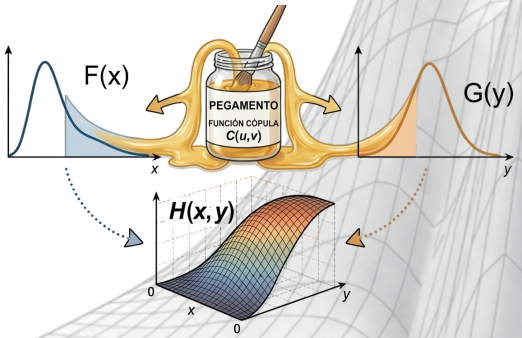


- Correlación de Pearson.

La correlación de Pearson es una herramienta fundamental para medir **dependencia lineal**, pero es limitada: la dependencia, en general, no tiene por qué ser lineal.

Necesitamos herramientas que midan **dependencias no lineales** y que logren separar el comportamiento individual del comportamiento conjunto.

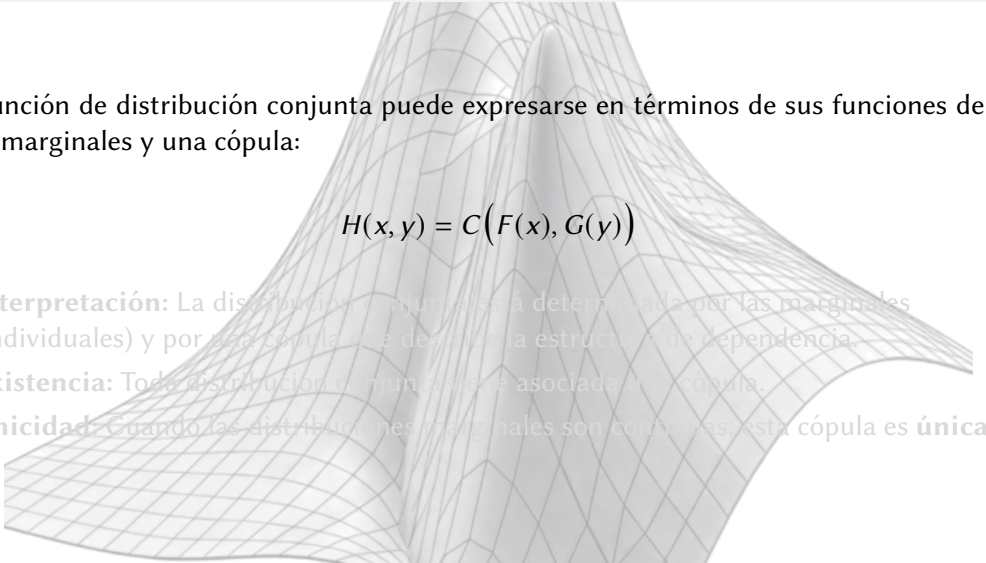
Cópula



La cópula es un pegamento que:

- Permite que las variables mantengan su propio comportamiento de forma individual (sus márgenes).
- Las une para estructurar cómo interactúan entre sí.
- Actúa sin alterar la naturaleza de cada una de ellas.

Teorema de Sklar



Toda función de distribución conjunta puede expresarse en términos de sus funciones de distribución marginales y una cópula:

$$H(x, y) = C\Big(F(x), G(y)\Big)$$

- **Interpretación:** La distribución conjunta está determinada por las marginales (individuales) y por una cópula que describe la estructura de dependencia.
- **Existencia:** Toda distribución conjunta tiene asociada una cópula.
- **Unicidad:** Cuando las distribuciones marginales son continuas, esta cópula es **única**.

Teorema de Sklar

Toda función de distribución conjunta puede expresarse en términos de sus funciones de distribución marginales y una cópula:

$$H(x, y) = C\Big(F(x), G(y)\Big)$$

- **Interpretación:** La distribución conjunta está determinada por las marginales (individuales) y por una cópula que describe la estructura de dependencia.
- **Existencia:** Toda distribución conjunta tiene asociada una cópula.
- **Unicidad:** Cuando las distribuciones marginales son continuas, esta cópula es **única**.

Teorema de Sklar

Toda función de distribución conjunta puede expresarse en términos de sus funciones de distribución marginales y una cópula:

$$H(x, y) = C\Big(F(x), G(y)\Big)$$

- **Interpretación:** La distribución conjunta está determinada por las marginales (individuales) y por una cópula que describe la estructura de dependencia.
- **Existencia:** Toda distribución conjunta tiene asociada una cópula.
- **Unicidad:** Cuando las distribuciones marginales son continuas, esta cópula es **única**.

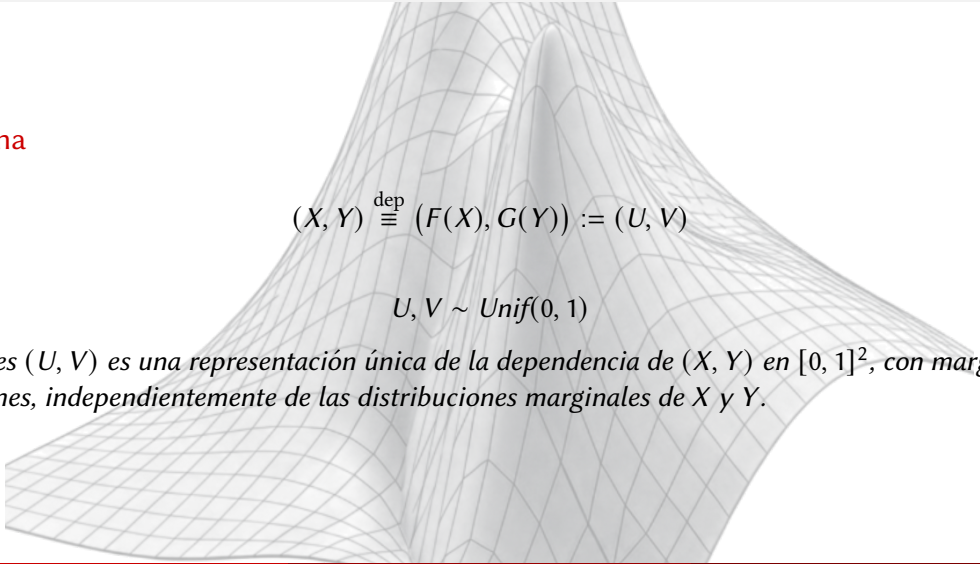
Teorema de Sklar

Toda función de distribución conjunta puede expresarse en términos de sus funciones de distribución marginales y una cópula:

$$H(x, y) = C\Big(F(x), G(y)\Big)$$

- **Interpretación:** La distribución conjunta está determinada por las marginales (individuales) y por una cópula que describe la estructura de dependencia.
- **Existencia:** Toda distribución conjunta tiene asociada una cópula.
- **Unicidad:** Cuando las distribuciones marginales son continuas, esta cópula es **única**.

Representando la dependencia en $[0,1]^2$



Teorema

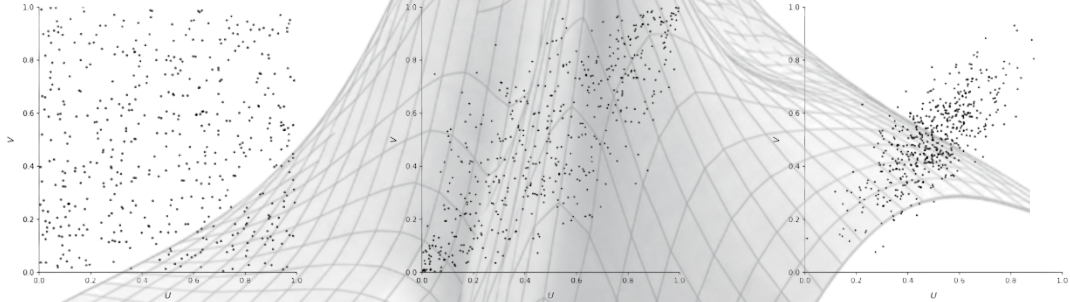
$$(X, Y) \overset{\text{dep}}{\equiv} \big(F(X), G(Y)\big) := (U, V)$$

$$U, V \sim Unif(0, 1)$$

Entonces (U, V) es una representación única de la dependencia de (X, Y) en $[0,1]^2$, con marginales uniformes, independientemente de las distribuciones marginales de X y Y.

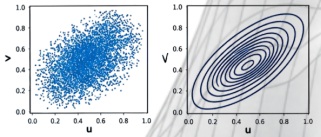
La dependencia se vuelve visible

Se reconoce cuando los puntos presentan una estructura o patrón: a mayor organización de la nube de puntos, mayor evidencia de la asociación entre las variables.



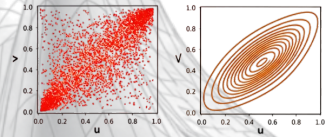
Curvas de nivel: Huella de la cópula

Cópula Gaussiana



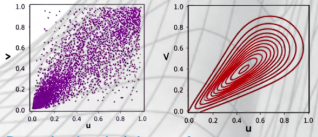
Presenta una dependencia simétrica. Sus contornos elípticos reflejan una estructura uniforme sin dependencia extrema en las colas.

Cópula t-Student



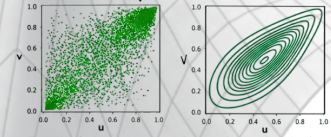
Estructura simétrica, pero a diferencia de la gaussiana, presenta fuerte dependencia de cola conjunta tanto superior como inferior.

Cópula Clayton



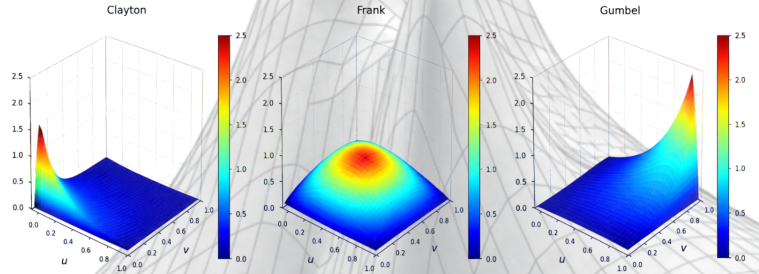
Dependencia asimétrica con fuerte dependencia de cola inferior.

Cópula Gumbel



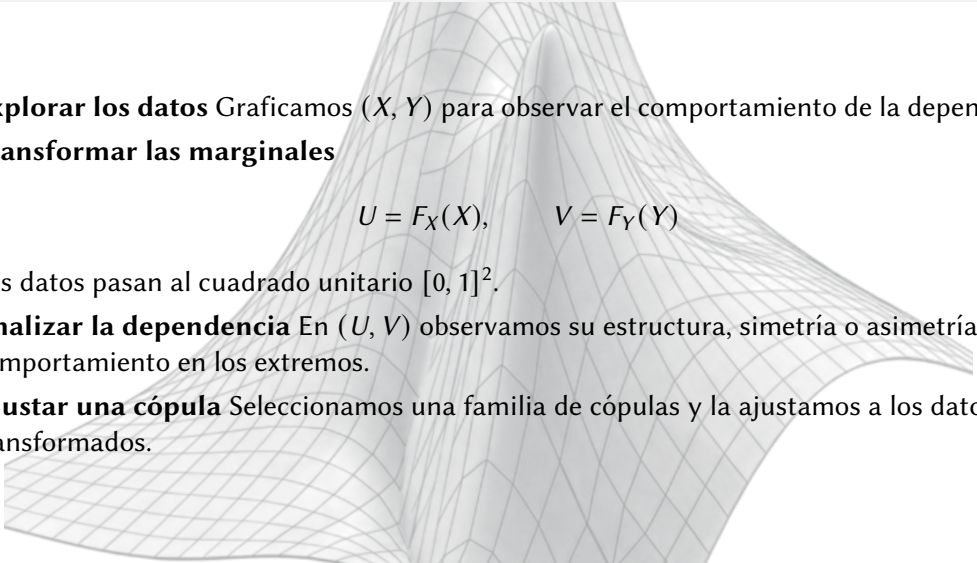
Es asimétrica y muestra fuerte dependencia de cola superior. Los eventos se concentran cerca de la esquina superior derecha.

Diferentes estructuras de dependencia



En estas superficies podemos observar dónde la dependencia se concentra con mayor intensidad. Los picos que aparecen cerca de las esquinas nos indican un comportamiento conjunto más marcado en los valores extremos.

Construcción de una cópula a partir de datos

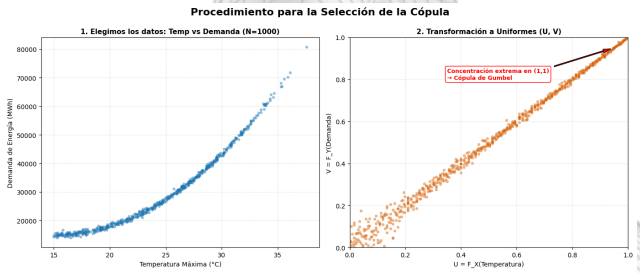


1. **Explorar los datos** Graficamos (X, Y) para observar el comportamiento de la dependencia.
2. **Transformar las marginales**

$$U = F_X(X), \qquad V = F_Y(Y)$$

   Los datos pasan al cuadrado unitario $[0, 1]^2$.
3. **Analizar la dependencia** En (U, V) observamos su estructura, simetría o asimetría y comportamiento en los extremos.
4. **Ajustar una cópula** Seleccionamos una familia de cópulas y la ajustamos a los datos transformados.

Construcción de una cópula a partir de datos: Ejemplo





¡Gracias por su atención!

Bibliografía

- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer.
- Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. CRC Press.
- Durante, F., & Sempi, C. (2015). *Principles of Copula Theory*. CRC Press.
- Erdely, A. (2009). Cópulas y dependencia de variables aleatorias: una introducción. *Miscelánea Matemática*, 48, 7–28.
- Spivak, M. (1965). *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. W. A. Benjamin. [Corresponde a *Cálculo con Funciones Vectoriales*]
- Ross, S. M. (2010). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists* (4th ed.). Academic Press.
- Evans, M. J., & Rosenthal, J. S. (2013). *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty* (2nd ed.). W. H. Freeman.