Aplicación de la dinámica holomorfa para resolver algunos sistemas de ecuaciones cuadráticas

Carlos Antonio Marín Mendoza
División de Ciencias Básicas de la UJAT

28 Septiembre 2026

Resumen

Extendemos el problema de resolver un sistema cíclico que involucra un polinomio cuadrático real, utilizando la dinámica de los polinomios cuadráticos complejos como método alternativo para determinar el número de soluciones de ciertos sistemas cíclicos de n ecuaciones cuadráticas reales con n variables.

Los polinomios cuadráticos reales asociados a los sistemas son conjugados a polinomios de la forma $f_c(x) = x^2 + c$, donde c es un parámetro real. Mediante la teoría de la dinámica holomorfa, determinamos cuántas soluciones reales poseen estos nuevos sistemas cíclicos de ecuaciones con polinomios f_c, en función de la posición de los parámetros c en la sección real del conjunto de Mandelbrot.

Iteración de funciones

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos la ***n*-ésima iterada** de f en $z \in \mathbb{C}$ como:

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) = f \circ f \circ \ldots \circ f(z)$$

es decir es la función f compuesta con ella misma n-veces evaluada en el punto z.
La **órbita** de f en z es la sucesión $\{f^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si f es un polinomio de grado $M \geq 1$, entonces f^n será un polinomio de grado M^n.
- Nos enfocamos en estudiar la **familia de polinomios cuadráticos**

$$f_c(z) = z^2 + c$$

donde $c \in \mathbb{C}$ parametriza a ésta familia, entonces

$$f_c^2(z) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2z^2c + c^2 + c$$

$$f_c^n(z) = z^{2^n} + \ldots + c$$

Conjuntos de Julia y de Fatou

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definimos su **conjunto de Julia lleno** $K(f)$ y su **conjunto de Julia** $J(f)$ como:

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es acotada}\}, \quad J(f) = \partial K(f) = \overline{K(f)} \cap \overline{K(f)^C}.$$

Y el **conjunto estable o de Fatou** $F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)$.

- Gaston Maurice Julia (Sidi Bel Abes, Argelia; 3 de febrero de 1893-París, Francia; 19 de marzo de 1978)
- Pierre Joseph Louis Fatou (Lorient, 28 de febrero de 1878 - Pornichet, 10 de agosto de 1929)

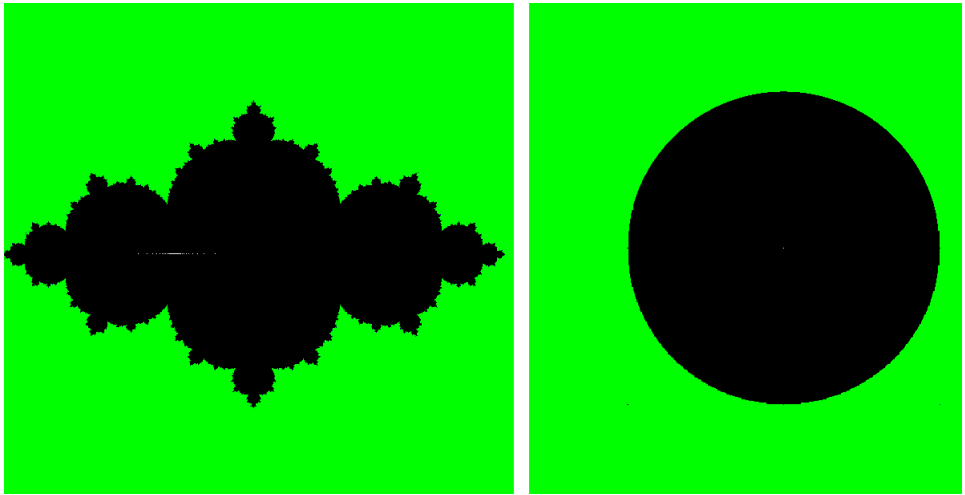


Figura: A la derecha el conjunto de Julia lleno de $f(z) = z^2$ a la izquierda el de $f_{-0.7}(z) = z^2 - 0.7$

Puntos periódicos

Si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(w) = w$ decimos que w es un **punto periódico** de f. Donde el **periodo** de w será el primer natural p tal que $f^p(w) = w$ y entonces se dice que w es un punto **p-periódico**

$$\{f^n(w)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{w, f(w), f^2(w), \ldots, f^{p-1}(w), w, f(w), f^2(w), \ldots\}.$$

Al conjunto de p términos distintos $\{w, f(w), f^2(w), \ldots, f^{p-1}(w)\}$ le llamaremos la **p-órbita periódica** u **órbita de w**.

Definiciones

Sean $X \subset \mathbb{C}$ y $f : X \to X$ una función con $w \in X$ un punto p-**periódico** de f tal que f^p es derivable en w entonces:

- w es un **punto super-atractor** si $|(f^p)'(w)| = 0$.
- w es un **punto atractor** si $0 < |(f^p)'(w)| < 1$.
- w es un **punto de repulsor** si $|(f^p)'(w)| > 1$.
- w es un **punto indiferente** si $|(f^p)'(w)| = 1$.
  Los indiferentes se pueden dividir en **parabólicos, Siegel o Cremer** dependiendo del ángulo del multiplicador $(f^p)'(w) = e^{2\pi i\theta}$, si $\theta \in \mathbb{Q}$ o $\theta \in \mathbb{I}$.

Al valor de la derivada de f^p en w le llamamos el **multiplicador** de w.

El Conjunto de Mandelbrot

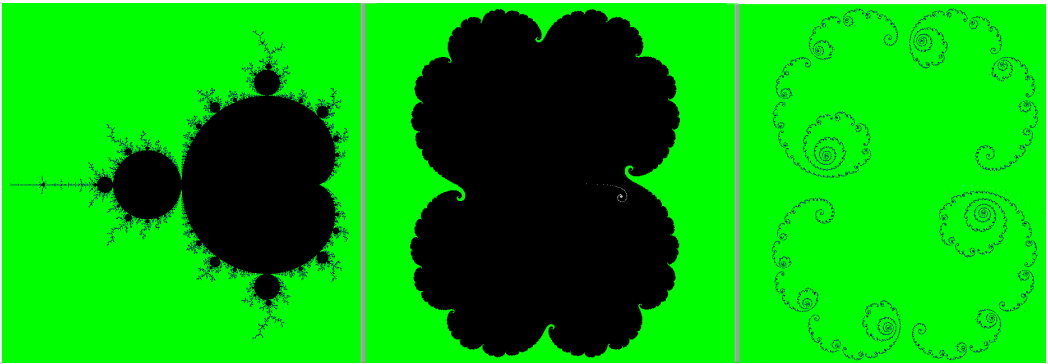
- Dado $c \in \mathbb{C}$ utilizaremos la notación $f_c(z) = z^2 + c$.
- El conjunto de Mandelbrot se define en el **plano de parámetros**, es decir cuando variamos $c \in \mathbb{C}$ de las funciones f_c.
- Recordemos que un conjunto **conexo** es el que aparece como una sola pieza, no se puede dividir o partir, en caso contrario se dice **disconexo**.

El Conjunto de Mandelbrot

Definición conjunto de Mandelbrot

Podemos definir el conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$ como:

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\}$$



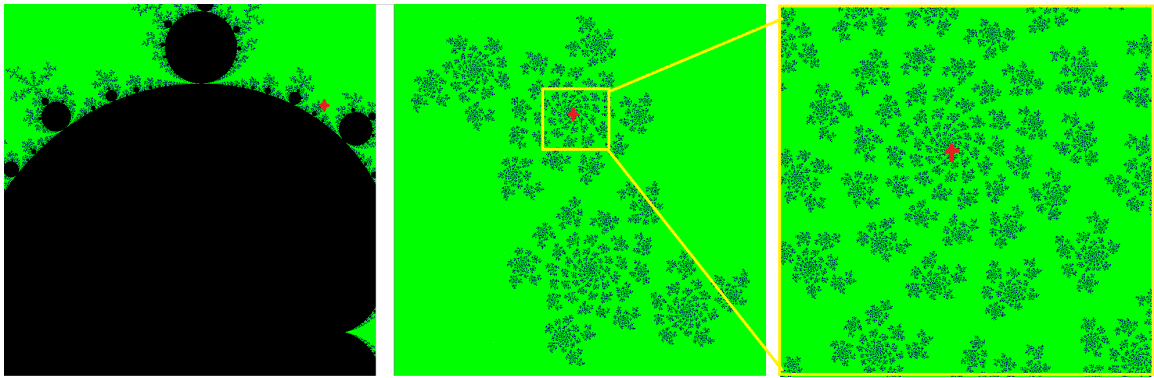


Figura: Si $c \notin \mathcal{M}$, entonces $J(f_c)$ es homeomorfo a un conjunto de Cantor y todos sus puntos periódicos son repulsores.

En dinámica holomorfa los puntos críticos de las funciones van a determinar su dinámica.

Corolario

El conjunto $J(f_c)$ es conexo si y sólo si la órbita del cero (el punto crítico) es acotada.

Definición conjunto de Mandelbrot

Se puede definir el conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$ como:

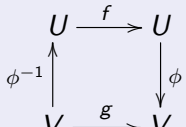
$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \in \mathbb{N}} \textit{ es acotada}\}$$

Conjugación

Decimos que una función $f : U \to U$ es **(conformemente) topológicamente conjugada** a la función $g : V \to V$ si existe un homeomorfismo (biholomorfismo) $\phi : U \to V$ tal que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Las conjugaciones **preservan la dinámica** por lo tanto si f y g son conjugadas, sus conjuntos de Julia son esencialmente los mismos.

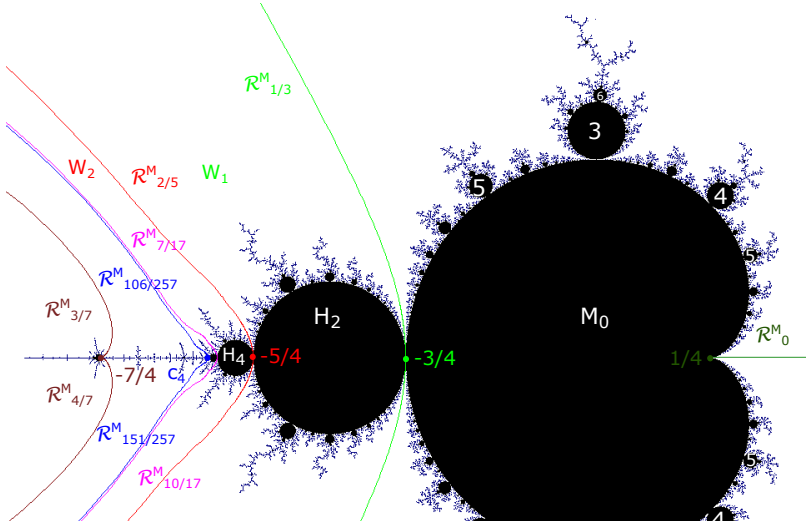


Importancia del conjunto de Mandelbrot

Teorema

Todo polinomio de segundo grado es conformemente conjugado a un **único** polinomio de la forma f_c.
Por lo tanto basta estudiar la dinámica de la familia de polinomios f_c, es decir el conjunto de Mandelbrot, para entender **la dinámica de todos los polinomios de segundo grado** en $\mathbb{C}$.

La idea de la demostración consiste en utilizar la teoría de **orbit portraits** (retratos de órbita) que es una colección de subconjuntos finitos de ángulos.
Esta teoría explica cómo surgen ciertas órbitas repulsoras o parabólicas a medida que se varía un parámetro real en el conjunto de Mandelbrot de derecha a izquierda.



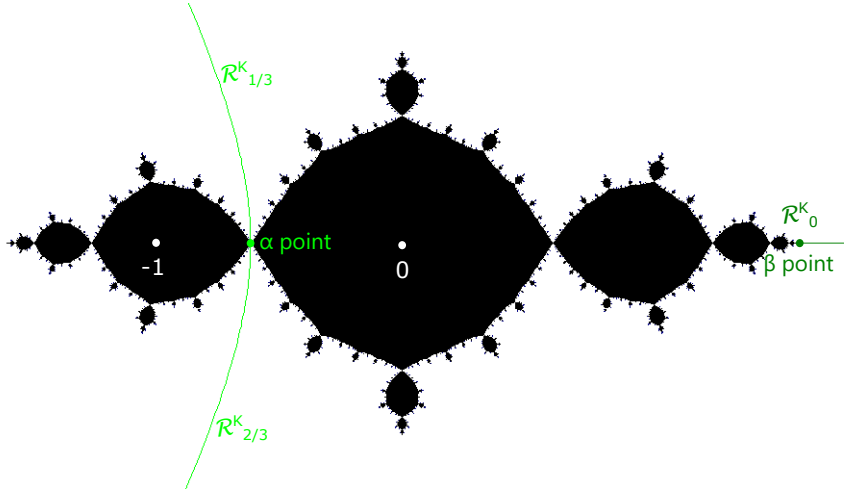


Figura: Conjunto de Julia lleno de $f_{-1}(z) = z^2 - 1$, que es el centro de la componente hiperbólica H_2. Se muestran los dos rayos dinámicos que determinan el retrato de órbita $\mathcal{P}_1$, junto con su punto de aterrizaje, el punto fijo $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. También son visibles el otro punto fijo $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, así como la órbita periódica superatractora formada por 0 y -1.

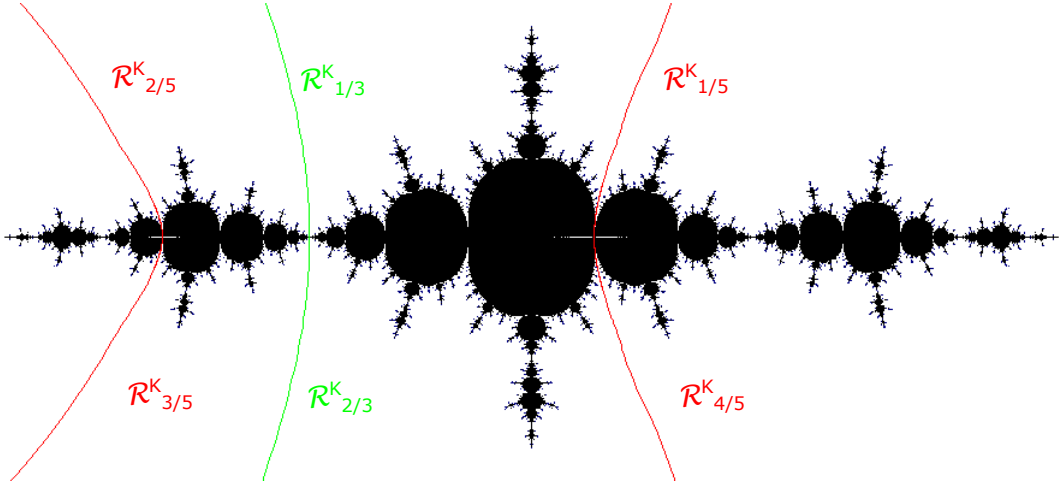


Figura: Conjunto de Julia lleno de $f_{-\frac{5}{4}}$, con los rayos dinámicos que llegan al punto fijo α en verde y los rayos dinámicos que llegan al ciclo parabólico real de periodo 2 en rojo, cuyos ángulos forman un retrato de órbita. También se muestra, en blanco, la órbita del punto crítico que converge al ciclo parabólico

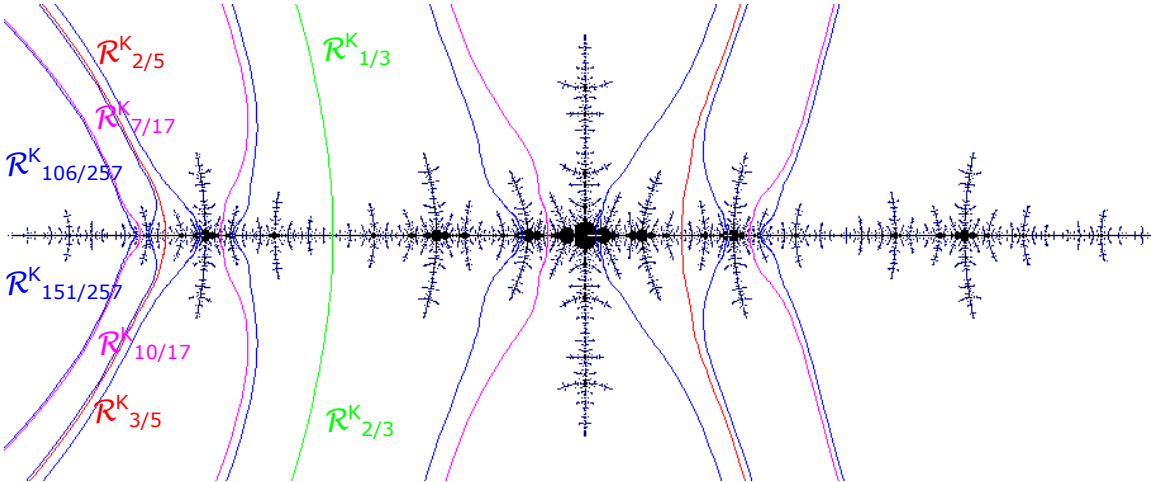


Figura: El conjunto de Julia lleno de f_{c_4}, donde $c_4 \approx -1.3940487044$ es el punto raíz de la componente hiperbólica real H_{2^4}. Se muestran los rayos dinámicos que aterrizan en las distintas órbitas periódicas reales de f_{c_4}: en verde, el punto fijo repulsor; en rojo, la órbita repulsora de periodo 2; en rosa, la órbita repulsora de periodo 4; y en azul, la órbita parabólica de periodo 8.

Introducción

Considere el problema de resolver, en los números reales, el siguiente sistema de n ecuaciones con n variables x_i,

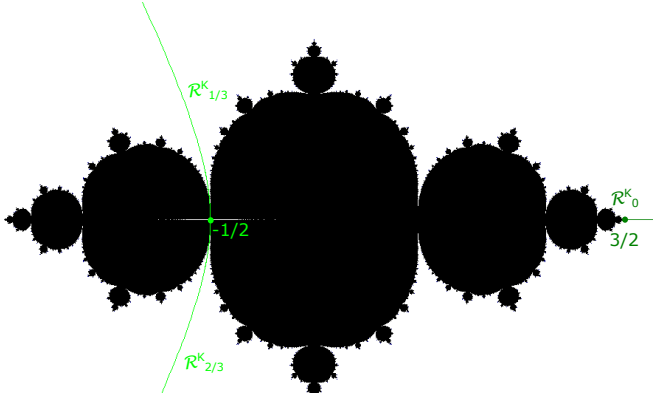
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 - 1 &= x_2 \\ x_2^2 + x_2 - 1 &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 + x_{n-1} - 1 &= x_n \\ x_n^2 + x_n - 1 &= x_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Este problema apareció como el Problema 3 en la edición 25 de la Competición Nacional de la Olimpiada Matemática Mexicana en 2011 (Véase [2]).
Una solución estándar para éste sistema usa simples manipulaciones algebraicas y la desigualdad entre la media artimética y la media geométrica (desiguladad AM-GM).

Introducción

- En lugar de trabajar con el polinomio real, podemos analizar las órbitas del polinomio complejo $f_{-\frac{3}{4}}(z) = z^2 - \frac{3}{4}$, el cual es (conformemente) conjugado al polinomio $z^2 + z - 1$.
- Sus órbitas estan en correspondencia uno-a-uno, entonces si encontramos una órbita periódica de periodo k de uno de los polinomios, usando la conjugación, podemos encontrar la órbita correspondiente de periodo k del otro polinomio.
- Analizando la dinámica del polinomio $f_{-3/4}$, encontraremos que las únicas soluciones para el sistema original de ecuaciones son $(-1, -1, \ldots, -1)$ y $(1, 1, \ldots, 1)$.

- El polinomio $f_{-3/4}$ tiene un punto **fijo parabólico** en $-\frac{1}{2}$, pues $f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -1$, luego cualquier otra órbita periódica debe ser repulsora.
- La dinámica de cualquier punto en la recta real tiene 3 posibilidades: su órbita se puede ir a infinito, converger al punto parabólico, o es una preimagen iterada del otro punto fijo $\frac{3}{2}$ o de $-\frac{1}{2}$.
- Por lo tanto las únicas órbitas periódicas reales de periodo n de $f_{-3/4}$ son sus dos puntos fijos $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$. Las cuales bajo la conjugación corresponden a -1 y 1.



Introducción

De forma general, tómese cualquier polinomio cuadrático real $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, donde a_0, a_1 y $a_2 \neq 0$ son números reales.

Considere el polinomio cuadrático $f_c(z) = z^2 + c$, donde $c = a_0 a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{4}^2$, entonces P y f_c son holomorfamente conjugados bajo una función afín.

Consideramos un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} P(x_1) &= x_2 \\ P(x_2) &= x_3 \\ &\vdots \\ P(x_{n-1}) &= x_n \\ P(x_n) &= x_1, \end{aligned}$$

o el sistema correspondiente con f_c en lugar de P, el cual llamaremos un c-**sistema con** n **ecuaciones**.

Para determinar cuántas soluciones reales tiene el c-sistema, podemos estudiar la dinámica de f_c y demostrar que, para valores reales del parámetro c, el número de soluciones reales del sistema dependerá tanto de la posición de c en el conjunto de Mandelbrot como del número de ecuaciones n.

Observación

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es un conjunto solución de un c-sistema con n ecuaciones, entonces también es una solución del c-sistema con $n \cdot k$ ecuaciones, para cualquier entero positivo k.

Resultados

En primer lugar, consideremos un parámetro real $c > \frac{1}{4}$.

- Dado que c se encuentra fuera de $\mathcal{M}$, la órbita del punto crítico 0 escapa al infinito y el conjunto de Julia de f_c es un conjunto de Cantor.
- Ahora bien, si x es un número real cualquiera, se tiene que $x^2 + c \geq c$, por lo que su órbita escapará al infinito, es decir, no hay órbitas periódicas reales.

Teorema 1

Sea c un parámetro real en el intervalo $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$, entonces un c-sistema con n ecuaciones no tiene soluciones reales.

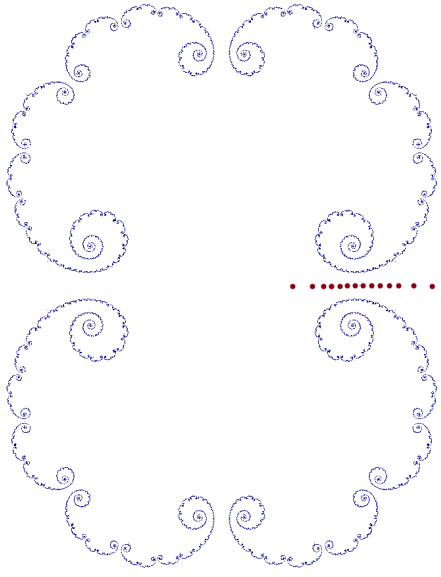


Figura: Conjunto de Julia de f_c con $c = 0.2727272$ y la órbita del punto crítico que escapa.

Resultados

Si restringimos los parámetros reales a la carioide principal M_0, es decir, $c \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$, los c-sistemas tendrán al menos una solución; de hecho, habrá exactamente dos soluciones.

- Si $c = 1/4$, el único punto fijo de f_c es real y es parabólico, así que cualquier $x \in \mathbb{R}$ tendrá una órbita que converge a éste punto o escapará a infinito.
- Para el caso $c \neq \frac{1}{4}$, f_c tiene un punto fijo atractor y uno repulsor. Todos los puntos en el interior del conjunto de Julia lleno van a converger al punto fijo atractor (los únicos puntos reales en el conjunto de Julia son el punto fijo repulsor y su preimagen).

Teorema 2

Sea $c \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$, entonces un c-sistema con n ecuaciones tiene únicamente dos soluciones, los puntos fijos de f_c.
En el caso $c = \frac{1}{4}$, el punto fijo de f_c tiene multiplicidad dos.



Figura: Conjunto de Julia de f_c con $c = 0.235$ y la órbita del punto crítico que converge al punto fijo atractor.

Resultados

Si nos continuamos moviendo hacia la izquierda en la recta real más allá del parámetro $-\frac{3}{4}$, atravesamos la cascada de duplicación de periodo de las componentes reales del conjunto de Mandelbrot (solo existen órbitas periódicas reales cuyo periodo es una potencia de 2); esta sucesión de componentes hiperbólicas de periodos 2^n converge al parámetro de Feigenbaum c_∞.

Teorema 3

Sea c un parámetro real en la componente hiperbólica H_{2^n} de periodo 2^n, con $n \geq 1$, en la 2-rama del conjunto de Mandelbrot. El número de soluciones de un c-sistema con m ecuaciones depende de la congruencia de m módulo 2^n.

- Si m es impar, el c-sistema solo tiene a los puntos fijos de f_c como soluciones.
- En otro caso si $m \equiv k \cdot 2^r \mod 2^n$, con k impar, $1 \leq r \leq n$, y $k \cdot 2^r \in \{0, 2, 4, \ldots, 2^n - 2\}$, entonces el c-sistema tiene como conjunto solución los dos puntos fijos y r órbitas periódicas, es decir, las órbitas periódicas reales de periodo 2^l de f_c, con $1 \leq l \leq r$.

Resultados

Finalmente, usando el Teorema de Sarkovskii, si consideramos cualquier parámetro real c a la izquierda de $-\frac{7}{4}$, todo c-sistema tiene solución, además de las triviales que corresponden a los puntos fijos de f_c.

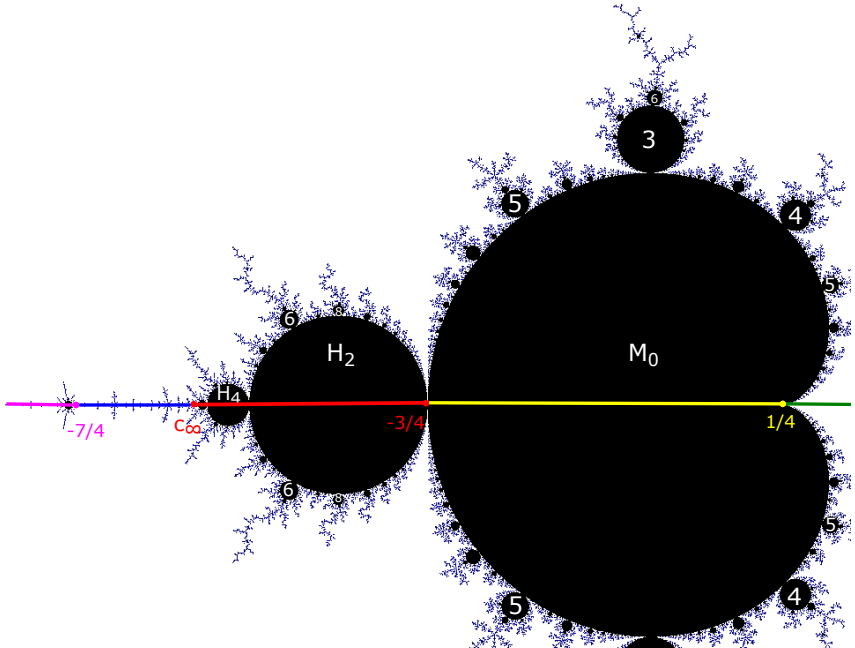
Teorema 4

Sea c un parámetro real en el intervalo $(-\infty, -\frac{7}{4}]$, entonces un c-sistema con n ecuaciones siempre tiene al menos una solución real. Más aún, para cada divisor positivo k de n, existirá una órbita de periodo k para f_c, una solución del c-sistema.

Conclusiones

Podemos describir un algoritmo para encontrar el número de soluciones de un sistema cíclico como sigue:

1. Identificar el polinomio cuadrático P del sistema cíclico.
2. Encontrar el polinomio cuadrático f_c conjugado a P y su conjugación φ.
3. Identificar que parte real del conjunto de Mandelbrot contiene a c.
4. Si el parámetro c no está en el espacio entre $-\frac{7}{4}$ y el parámetro de Feigenbaum, aplicar el Teorema del 1 al 4 correspondiente.
5. Usar φ^{-1} para regresar al sistema original.


3
6
5
4
5
6
6
H_2
M_0
H_4
c_∞
-7/4
-3/4
1/4
6
5
5
4

Conclusiones

- La principal ventaja del la técnica que usamos aquí, comparada con, por ejemplo, algoritmos de eliminación Gaussiana o la teoría de bases de Gröbner, es que no solamente podemos determinar si el sistema tiene o no solución, sino también podemos determinar los diferentes intervalos en la recta real donde el número de soluciones permanece estable y donde dicho número cambia.
- En los resultados anteriores hay un hueco entre el parámetro de Feigenbaum $c_\infty \approx -1.401155$ y $-\frac{7}{4}$. En medio, existen muchas pequeñas copias reales del conjunto de Mandelbrot, cada una originada de una componente hiperbólica con un periodo específico. Estos períodos se comportan según el orden de Sharkovskii, de modo que podemos resolver el sistema-c correspondiente en función de la posición de dicho parámetro c en este intervalo, pero la combinatoria resulta más compleja.
- Esperamos aplicar estas ideas a otras familias de funciones racionales para resolver otros sistemas de ecuaciones cíclicas.

Bibliografía

[1] Gamaliel Ble, Carlos Marín, Rogelio Valdez (2026). An Application of Holomorphic Dynamics to Solve Some Systems of Quadratic Equations. Mathematics and Statistics, 14(2), 235-247.

[2] Gómez J., Rubio J., Valdez R., "Concursos Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: 1987-2016 ", Collection Papirhos, Serie Icosaedro, Núm. 3, Institute of Mathematics, UNAM, México City, 2019.

[3] Milnor J., "Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set: an expository account", Astérisque, vol. 261, pp. 277-333, 2000.

[4] Zakeri S., "External rays and the real slice of the Mandelbrot set", Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 23, pp. 637-660, 2022.