FRACTALES DE NEWTON

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División académica de ciencias básicas

Almno. Nicole Angélica Gónzalez Broca
Dr. Jorge Lopéz Lopéz

Resumen

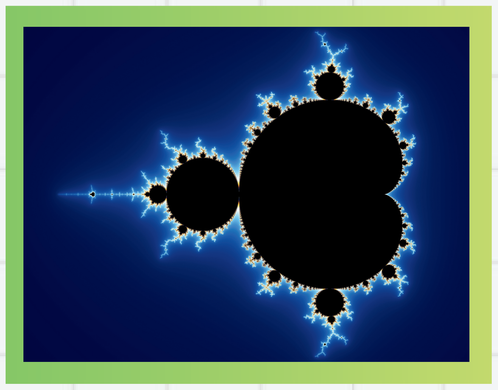
El objetivo de este cartel es mostrar algunos fractales de Newton, que se generan al aplicar simultáneamente el método de Newton para aproximar las raíces de una función compleja, tomando como condición inicial cada uno de los puntos de una región del plano. Las iteraciones de Newton convergerán a alguna de las raíces de la función, así que las cuencas de atracción se obtienen coloreando cada punto inicial de acuerdo a la raíz a la que converge Newton y al número de iteraciones requeridas para la convergencia. Los fractales aparecen en las fronteras de las cuencas de atracción. Se mostrarán resultadas para las funciones:

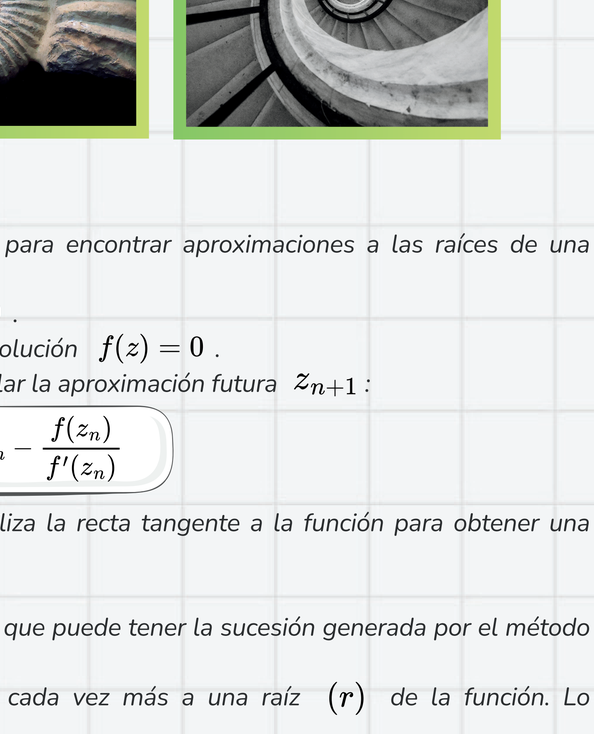
¿Que son los fractales?

Los fractales son patrones infinitamente complejos que presentan autosimilitud en diferentes escalas. Se crean repitiendo un proceso simple una y otra vez en un bucle de retroalimentación continua.
Hay muchos objetos ordinarios que, debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales, aunque no los reconozcamos. Geométricamente, existen entre nuestras dimensiones familiares como lo son las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos son fractales naturales, aunque finitos ergo no ideales; no así como los fractales matemáticos que gozan de infinidad y son ideales. Los fractales abstractos, como el conjunto de ***Mandelbrot****, pueden generarse mediante un ordenador que calcula una ecuación simple repetidamente.*

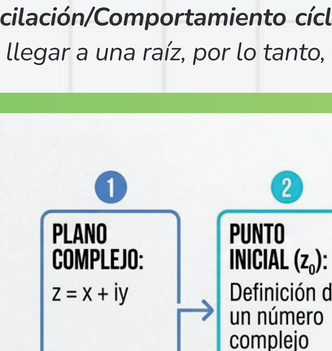
Diferencia entre lo ideal y lo real

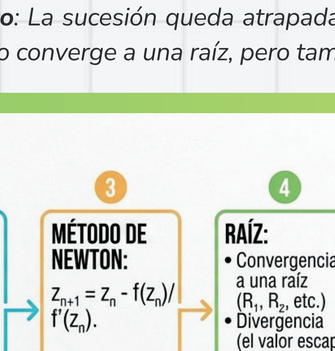
Fractales matemáticos (Ideales): *Poseen una complejidad e iteración infinita; se pueden ampliar indefinidamente sin perder su definición geométrica pura.*

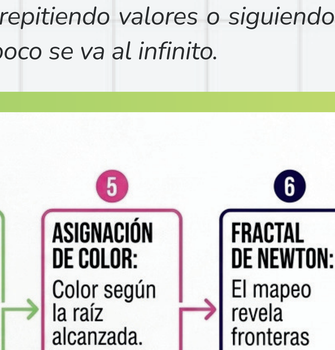




Fractales naturales (No ideales): *Son finitos porque dependen de la materia y el espacio físico del mundo real, de modo que, al llegar a una escala atómica o límite físico, la autosimilitud se detiene.*







Método de Newton

El método de Newton es un algoritmo diseñado para encontrar aproximaciones a las raíces de una función $f(z)$. *Tenemos:*
Paso 0*: Encontrar* $f'(z)$ *y asegurar que* $f'(z) \neq 0$.
Paso 1*: Dar una aproximación para* z_o *para una solución* $f(z) = 0$.
Paso 2*: Usa la aproximación actual* z_n *para calcular la aproximación futura* z_{n+1} *:*

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

La idea es que, a partir de un punto inicial, se utiliza la recta tangente a la función para obtener una aproximación cada vez mejor de la raíz.

Tengamos en cuenta que existen tres posibilidades que puede tener la sucesión generada por el método de Newton
Convergencia a una raíz*: La sucesión se acerca cada vez más a una raíz* (r) *de la función. Lo consideramos el resultado deseado.*
Divergencia*: La sucesión no se acerca a ninguna raíz y sus valores pueden crecer indefinidamente*

$$|z_n| \to \infty$$

En otras palabras, la sucesión se aleja de las soluciones en lugar de aproximarse a ellas.
Oscilación/Comportamiento cíclico*: La sucesión queda atrapada repitiendo valores o siguiendo un ciclo sin llegar a una raíz, por lo tanto, no converge a una raíz, pero tampoco se va al infinito.*

Fractales de Newton

Surgen al combinar el comportamiento iterativo del método de Newton con el estudio de las funciones en el plano complejo, al repetir este proceso para una gran cantidad de puntos iniciales del plano, se forman diferentes ***regiones de atracción****, donde cada región contiene los puntos que* ***convergen*** *hacia una misma raíz.*
Se asigna un color diferente a cada punto según la raíz a la que converge y en algunos casos, según el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia, los resultados son regiones denominadas ***cuencas de atracción****, separadas por fronteras de extraordinaria complejidad geométrica que presentan autosimilitud a diferentes escalas*

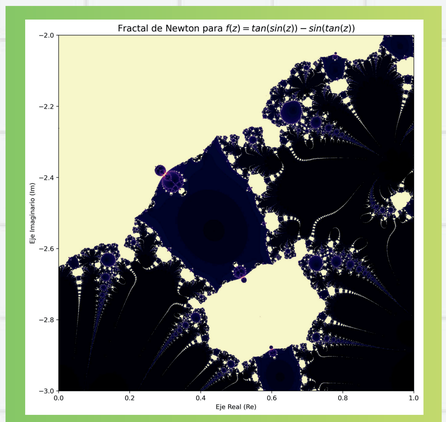
```
% Plano complejo
x = linspace(-15,15,N);
y = linspace(-15,15,N);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = X + 1i*Y;

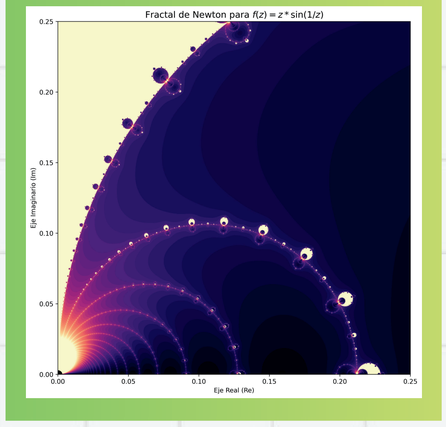
Zk = Z;
iters = zeros(size(Z));

% IteraciÛn de Newton
for k = 1:maxIter
    Zk = Zk - f(Zk)./df(Zk);

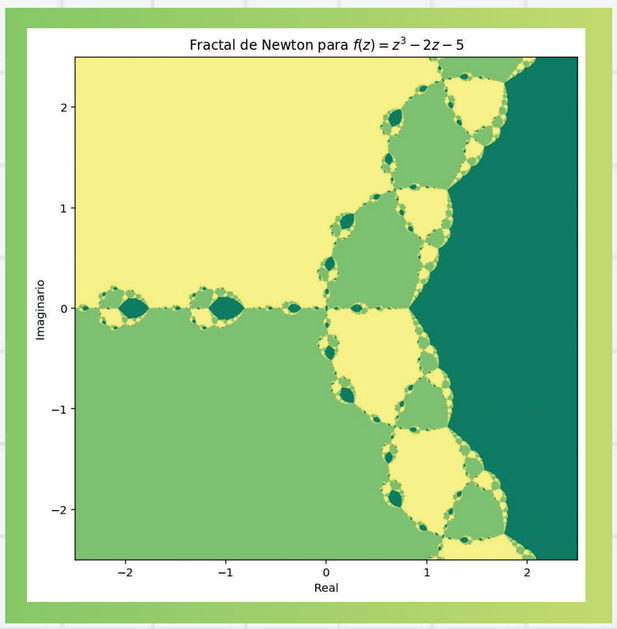
    converged = abs(f(Zk)) < tol;
    newly = (iters == 0) & converged;
    iters(newly) = k;
end
```

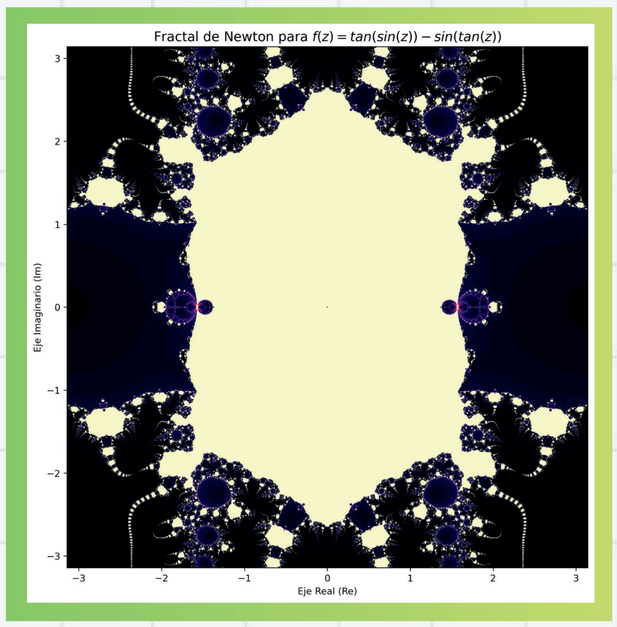
Cada polinomio genera un universo geométrico único. Al cambiar los exponentes o sumar nuevas variables, las fronteras se transforman y las estructuras resultantes cambian drásticamente. Sin embargo, aunque las ecuaciones cambian, la regla se mantiene, pues el detalle es infinito y el orden y el caos coexisten en el mismo plano.

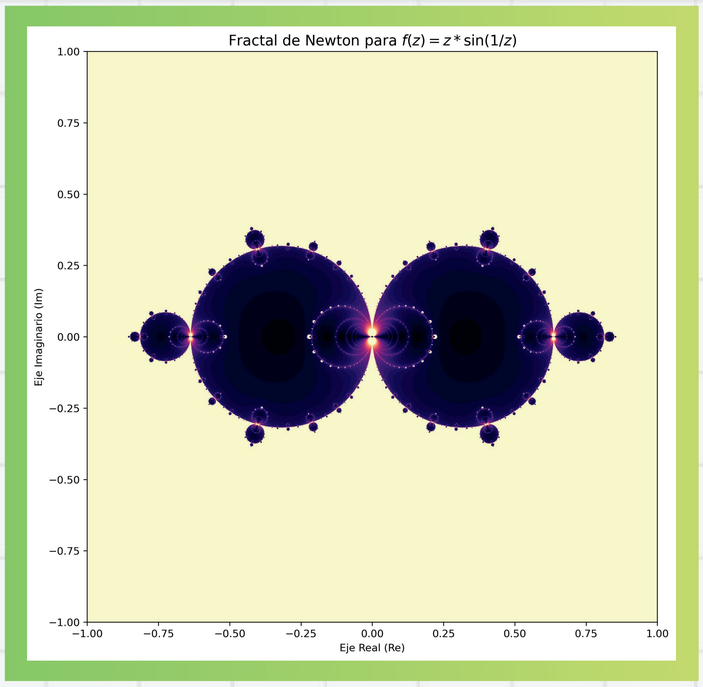




Para visualizar este fenómeno, se desarrolló un software propio que calcula cierto parametro de iteraciones por segundo en el plano complejo. El programa evalúa el comportamiento de cada punto inicial mediante el método de Newton, asignando un color automático según la raíz alcanzada. El resultado es la imagen adjunta.







Referencias

- ***Moler, C. (2019).*** *GPU Enables Obsession with Fractals. MathWorks News&Notes.*
-