Análisis de bifurcación de Hopf para un modelo tritrófico tipo Gause con respuestas funcionales genéricas

M.C. Marcela Guadalupe Morales Álvarez
Coautor: Dr. Miguel Angel de la Rosa Castillo
División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

1. Resumen

En este cartel se analiza un modelo matemático dado por un sistema de EDO, para la interacción de tres poblaciones (una presa **P**, un mesodepredador **MP**, un superdepredador **SP**) en un ecosistema.
Las poblaciones MP y SP son generalistas y las respuestas funcionales que gobiernan las interacciones por depredación, dependen de dos densidades poblacionales lo que permite introducir aspectos ecologícos como interferencia, saciedad y grupo de defensa, así como una combinación de estos.
El resultado principal del trabajo muestra que el sistema diferencial presenta una bifurcación de Hopf (que puede ser supercrítica o subcrítica). Se presentarán ejemplos con respuestas funcionales específicas para las cuales la bifurcación es supercrítica y por lo tanto la coexistencia de las especies es factible. Finalmente, se dan algunas simulaciones numéricas para ilustrar los resultados.

2. Descripción del Modelo

Premisas ecologicas del modelo:

1. La tasa intrínseca de crecimiento de P (con densidad x) en ausencia de MP (con densidad y) está medida por el término $\rho_1 x h_1(x)$, donde $h_1(x)$ es una función positiva suave y ρ_1 es la tasa de crecimiento intrínseca de P.
2. La interacción MP–P se describe mediante una función positiva suave que depende de la densidades x y y, $f(x, y)$.
3. La interacción SP-MP se define por una función positiva suave que depende de las densidades poblacionales y y $z : g(y, z)$.
4. En las interacciones MP-P y SP-MP existe un aprovechamiento que incrementa la tasa de crecimiento de forma directamente proporcional al consumo. Se asume que MP y SP son generalistas.

Derivado de las premisas anteriores, se obtiene que la interacción del modelo adimensional:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \rho_1 x h(x) - y f(x, y)\\ \frac{dy}{dt} &= \rho_2 y\left(1 - \frac{y}{k_2}\right) + c_1 y f(x, y) - z g(y, z)\\ \frac{dz}{dt} &= \rho_3 z\left(1 - \frac{z}{k_3}\right) + c_2 z g(y, z)\end{aligned} \tag{1}$$

donde,

- c_1 es el coeficiente de aprovechamiento de y,
- c_2 es el coeficiente de aprovechamiento de z,
- k_2 es la capacidad de carga de y,
- k_3 es la capacidad de carga de z.

3. Existencia de puntos equilibrios

Sea $\Omega = \{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 : x_1, y_1, z_1 > 0\}$.

Lema 3.1 *Sea $p_0 \in \Omega$. El punto p_0 es un punto de equilibrio del sistema diferencial (1) si satisface:*

$$\rho_1 = \frac{y_0 f(x_0, y_0)}{x_0 h(x_0)},\ c_2 = \frac{\rho_3}{g(y_0, z_0)}, c_1 = \frac{\rho_2 y_0\left(-1 + \frac{y_0}{k_2}\right) + z_0 g(y_0, z_0)}{y_0 f(x_0, y_0)} > 0 \text{ y} \tag{2}$$

$$k_3 = \frac{z_0}{2}.$$

Supongamos que las hipótesis del Lema 3.1 son válidas. Consideramos:

$$\begin{aligned} x_0 &= z_0,\\ y_0 &= z_0,\\ h(x_0) &= -x_0 h'(x_0),\\ f(x_0, y_0) &= 2y_0 f^{(1,0)}(x_0, y_0),\\ g(y_0, z_0) &= 2z_0 g^{(1,0)}(y_0, z_0),\\ g^{(0,1)}(y_0, z_0) &= -\frac{1}{4} g^{(1,0)}(y_0, z_0),\\ f^{(1,0)}(x_0, y_0) &= 2g^{(1,0)}(y_0, z_0),\\ f^{(0,1)}(x_0, y_0) &= 2g^{(0,1)}(y_0, z_0),\end{aligned} \tag{3}$$

donde $h'(x_0) < 0$, $f^{(1,0)}(x_0, y_0) > 0$,$f^{(0,1)}(x_0, y_0) < 0$, $g^{(1,0)}(y_0, z_0) > 0$, $g^{(0,1)}(y_0, z_0) < 0$.

Proposición 3.1 *Si las condiciones de Lema 3.1 y de la ecuación (3) se satisfacen,*

$$k_2 = \frac{22 z_0}{5},\ \rho_2 = 2z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0) \text{ y } \rho_3 > \rho_{30},$$

donde

$$\rho_{30} = \frac{\left(\sqrt{2282345521} - 39175\right) z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)}{153714} \approx 0.0559409 z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0);$$

entonces, el punto de equilibrio p_0 es localmente asintóticamente estable.

Corolario 3.1 *Existen condiciones en los parámetros del modelo* (1) *que garantizan la coexistencia de las tres especies, mediante un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable.*

4. Análisis de Bifurcación de Hopf

En está seción uno quiere analizar el teorema de Andronov-Hopf para el sistema Gause, para ello empezamos con poner el resultado de siguiente:

Teorema 4.1 (Teorema de Andronov-Hopf en $\mathbb{R}^3$) *Hípotesis:*

- *Un sistema $\dot{x} = F(x, \mu)$, F clase $C^4(U)$, con $x \in U \subset \mathbb{R}^3$, $\mu \in I \subset \mathbb{R}$.*
- *Existencia de un punto de equilibrio $x_0(\mu_0)$.*
- *La derivada $Df(x_0, \mu)$ tiene valores propios*

$$\lambda(\mu) = \zeta(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

tales que en $\mu = \mu_0$ se tiene un par de valores propios puramente imaginarios: $\lambda(\mu_0) = \pm i\omega_0$, ω_0 positivo.

BH1 $\frac{dRe\lambda(\mu)}{d\mu}(\mu_0) \neq 0.$

BH2 $\ell_1(x^0(\mu_0)) \neq 0.$

Afirmación: El sistema exhibe una Bifurcación de Hopf en $x_0(\mu)$ en $\mu = \mu_0$. Además,

- *Si $\ell_1(x^0(\mu_0)) \cdot \frac{dRe\lambda(\mu)}{d\mu}|_{\mu_0} < 0$, entonces existe un único ciclo límite estable para valores $\mu > \mu_0$.*
- *Si $\ell_1(x^0(\mu_0)) \cdot \frac{dRe\lambda(\mu)}{d\mu}|_{\mu_0} > 0$, entonces existe un único ciclo límite estable para valores $\mu < \mu_0$.*

Bajo las condiciones de existencia de p_0 en (3.1), las condiciones de las respuestas funcionales en (3) y

$$k_2 = \frac{22 z_0}{5},\ \rho_2 = 2z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0),$$

el sistema tiene un punto de equilibrio $p_0 = (z_0, z_0, z_0)$ y la aproximación lineal en p_0 es

$$J_{p_0} = \begin{pmatrix} -2z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0) & -\frac{7 z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)}{2} & 0\\ \frac{5 z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)}{22} & \frac{43 z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)}{88} & \frac{-7 z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)}{4}\\ 0 & \frac{\rho_3}{2} & -\frac{17\rho_3}{8}\end{pmatrix} \tag{4}$$

Cuyo polinomio característico $P(\lambda; \rho_3)$ tiene coeficientes:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1,\\ A_1 &= \frac{133}{88} z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0) + \frac{17\rho_3}{8}, ,\\ A_2 &= \frac{z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)\left(2877\rho_3 - 128 z_0 g^{(1,0)}(z_0, z_0)\right)}{704},\\ A_3 &= \frac{15}{11}\rho_3 z_0^2 g^{(1,0)}(z_0, z_0)^2.\end{aligned}$$

Ahora, para garantizar las condiciones necesarias de bifurcación de hopf, el polinomio característico correspondiente a la linealización en p_0 debe tener la siguiente factorización:

$$Pol_0(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda^2 + \omega^2),\ \omega > 0,$$

donde α es una raíz real y $\pm\omega$ son raices complejas conjugadas. De lo cual, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.1 *Si $\rho_3 = \rho_{30}$, entonces $A_1, A_2, A_3 > 0$ y $\Delta_2 = A_1 A_2 - A_3 = 0$. Por lo tanto,*

$$P(\lambda; \rho_{30}) = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda - \alpha),\ \ \alpha = -A_1, \omega = \sqrt{A_2}.$$

De acuerdo con las formulas de [Kuznetsov2013] calculamos los vectores propios normalizados:

$$\begin{aligned} q &\approx \{-0.496 - 0.7093i, 0.2396 + 0.4360i, 0.0564\},\\ \bar{p} &\approx \{-0.0208 - 0.157i, -0.0339 - 1.4023i, 8.829 + 4.578i\},\end{aligned}$$

tal que $\bar{p} \cdot q = 1$. Por lo cual, el primer coeficiente de Lyapunov

$$\begin{aligned}\ell_1 = \frac{1}{2\omega_0} Re(&\bar{p} \cdot C(q, q, \bar{q}) - 2\bar{p} \cdot B(q, A^{-1} B(q, \bar{q})) +\\ &\bar{p} \cdot B(\bar{q}, (2i\omega_0 I - A)^{-1} B(q, q))),\end{aligned}$$

donde B es la forma bilineal y C la trilineal, de la aproximación de Taylor del campo $F(x + p_0)$ en 0. y la transversalidad está dada por

$$\frac{dRe\lambda}{d\rho_3}(\rho_{30}) \approx -0.997979.$$

5. Resultados principales

Teorema 5.1 *Supongamos que las hipótesis del Lema 3.1 se cumplen. Como $\frac{dRe\lambda}{d\rho_3}(\rho_{30})$ es negativa, si $\ell_1(p_0, \rho_{30}) \neq 0$, entonces el sistema presenta una bifurcación de hopf en p_0 con parámetro de bifurcación ρ_3 y valor de bifurcación ρ_{30}.*

Teorema 5.2 *Supongamos que $h(x) := 1 - \frac{x}{k_1}$, $f(x, y) := \frac{x}{a_1 x + a_2 + a_3}$, $g(y, z) := \frac{y}{b_1 y^2 + b_2 + b_3 z}$ y los parámetros del sistema Gause se satisface*

$$\begin{aligned}&\rho_1 = \frac{1}{a_1}, \rho_2 = \frac{1}{4a_1}, c_1 = \frac{5}{44}, c_2 = 4a_1\rho_3, k_2 = \frac{22 z_0}{5}, k_3 = \frac{z_0}{2}, k_1 = 2z_0\\ &a_2 = \frac{3a_1 z_0}{4}, a_3 = \frac{a_1}{4},\ b_1 = \frac{a_1}{z_0},\ b_2 = \frac{5a_1 z_0}{2},\ b_3 = \frac{a_1}{2},\end{aligned}$$

donde $a_1 > 0$, $z_0 > 0$ entonces, $\ell_1(p_0, \rho_{30}) \approx -\frac{7.3464}{z_0^2}$, y el sistema Gause presenta una bifurcación de hopf súper crítica en $p_0 = (z_0, z_0, z_0)$ con respecto a ρ_3 y valor de bifurcación $\rho_{30} \approx \frac{0.00699261}{a_1}$.

Ejemplo 5.1 *Sea $a_1 = 1.5$ y $z_0 = 1.7$. Las siguientes condiciones satisfacen las hipótesis del teorema anterior:*

$\rho_1 = 0.666667, \rho_2 = 0.166667, c_1 = 0.113636, c_2 = 0.0219705, k_2 = 7.48,$
$k_3 = 0.85, k_1 = 3.4 a_2 = 1.9125, a_3 = 0.375, b_1 = 0.882353,\ b_2 = 6.375,$
$b_3 = 0.75.$

Más aún, el primer coeficiente de Lyapunov es $\ell_1(p_0, \rho_{30}) = -2.54201 < 0$. Por lo tanto, el sistema 1 tiene una bifurcación de hopf supercrítica en $p_0 = (1.7, 1.7, 1.7)$ con respecto a ρ_3 y valor de bifurcación $\rho_{30} \approx 0.0046$.

Si $\rho_3 = \rho_{30} - \left(\frac{1}{1000}\right) \approx 0.0036$ se tiene las series de tiempo de las poblaciones.

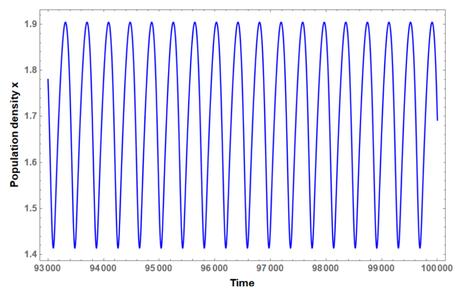


Figura 1: Serie de tiempo de la población x.

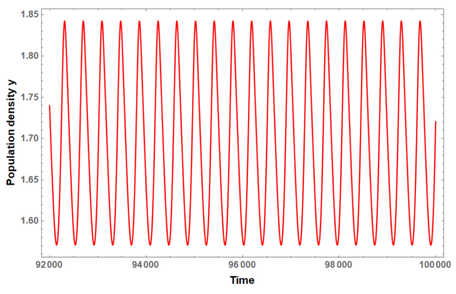


Figura 2: Serie de tiempo de la población y.

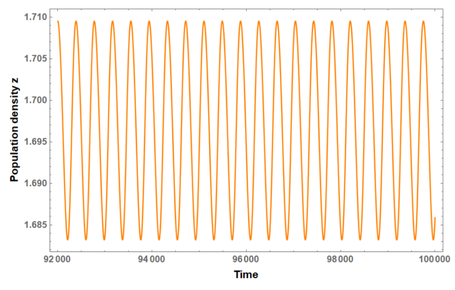
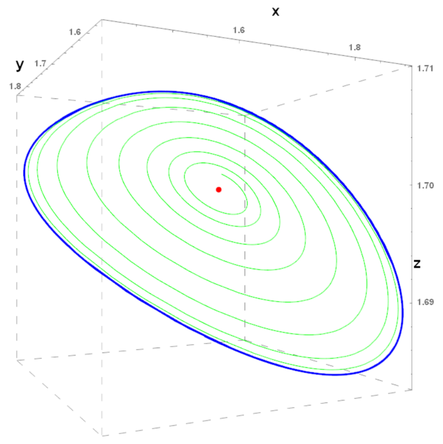


Figura 3: Serie de tiempo de la población z.

En la siguiente figura mostramos una curva integral en el espacio fase del sistema 1, que comienza en $p_0 = (1.7, 1.7, 1.7)$, y tiende a un ciclo límite estable cuando $t \to \infty$.



6. Conclusión

- El sistema 1 exhibe una bifurcación de Hopf con respecto a ρ_3.
- Se mostrarón condiciones en los parámetros para garantizar la coexistencia de las poblaciones x, y y z, a través de la existencia de un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable o bien de un ciclo límite estable.
- Se mostraron condiciones en los parámetros tales que:
  - $c_1, c_2 < 1$, por lo tanto, el aprovechamiento de los depredadores es fáctible. Más aún, el aprovechamiento del superdepredador es mayor que el del mesodepredador.
  - $a_3 < b_3$, por lo tanto, el mesodepredador experimenta menor interferencia que el superdepredador en la interacción.

Referencias

[Kuznetsov2013] Kuznetsov, Y.A. (2013). Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer Science & Business Media, Berlin.