Formulación integral del problema de Cauchy asociado a la derivada conformable

Enrique Emilio Ixba Rueda, Porfirio Toledo Hernández, Carlos Alberto Hernández Linares

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana

ZS23014530@estudiantes.uv.mx

Resumen

En este trabajo se estudia la derivada conformable como una extensión del concepto clásico de derivada a órdenes no enteros. En particular, se presentan los criterios propuestos por Sales Teodoro [6] para la clasificación de operadores como derivadas fraccionarias y, a partir de ellos, se analiza la definición introducida por Khalil [4], mostrando que esta satisface los criterios necesarios para ser considerada como un operador local de orden no entero. Se estudian, además, algunas propiedades fundamentales de la derivada conformable y se introduce una integral conformable mediante la definición de un operador inverso. Finalmente, se estudia el problema de Cauchy asociado y se obtiene una formulación integral equivalente. Bajo una condición global de Lipschitz, se establecen condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución mediante el teorema del punto fijo de Banach.

Operadores locales y la derivada conformable

A lo largo del tiempo se han propuesto numerosas definiciones de derivada no entera, cada una con propiedades y alcances particulares. Esta diversidad de formulaciones ha hecho necesario establecer criterios que permitan clasificarlas y determinar si un operador dado puede considerarse legítimamente derivada. En este sentido, Sales Teodoro [6] propone un conjunto de criterios orientados a caracterizar este tipo de operadores. Con base en dichos criterios, en este documento se analiza la derivada conformable, con el objetivo de mostrar que se trata, en realidad, de un operador local de orden no entero.

Definición 1. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Decimos que f es α-diferenciable, con $\alpha \in (0,1]$, si para todo $t > 0$ existe el límite

$$T_\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

Este operador es local y satisface las propiedades fundamentales del cálculo clásico: linealidad, derivada nula de las funciones constantes, regla de Leibniz (producto) y de la cadena.

Teorema. Sean $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funciones α-diferenciables para $t > 0$, con $\alpha \in (0,1]$. Entonces, la derivada conformable tiene las siguientes propiedades:

- **Linealidad:** si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $T_\alpha(af + bg)(t) = aT_\alpha f(t) + bT_\alpha g(t)$.
- Para $\alpha = 1$, coincide con la derivada usual; es decir, $T_1 f(t) = f'(t)$.
- Para cualquier función constante $f(t) = c$, se tiene $T_\alpha f(t) = 0$.
- **Regla de Leibniz (producto):** $T_\alpha(fg)(t) = g(t)T_\alpha f(t) + f(t)T_\alpha g(t)$.
- **Regla de la cadena:** si $g(t) > 0$, entonces

$$T_\alpha((f \circ g)(t)) = g(t)^{\alpha-1} T_\alpha g(t)\, (T_\alpha f)(g(t)).$$

De acuerdo con la clasificación propuesta en [6], estas propiedades sitúan a la derivada conformable dentro de la clase de operadores locales de orden no entero. Adicionalmente, una propiedad relevante de esta definición es que, siempre que f sea diferenciable en el sentido ordinario, se cumple

$$T_\alpha(f(t)) = t^{1-\alpha} f'(t), \qquad \forall\, \alpha \in (0,1].$$

En el marco considerado por Tarasov [7], los operadores locales que satisfacen determinadas propiedades pueden expresarse en la forma $D^\alpha f(t) = \psi(t) f'(t)$.

Entre las propiedades que se derivan de esta caracterización, destacan en particular las relacionadas con la continuidad, que se muestran en los siguientes resultados.

Teorema. Si una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es α-diferenciable, con $\alpha \in (0,1]$, en un punto $t_0 > 0$, entonces f es continua en t_0.

Proposición. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ α-diferenciable para algún $\alpha \in (0,1)$.

(a) Si $f^{(\alpha)}$ es acotada en $[a,b]$, con $a > 0$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$ y, por lo tanto, acotada.

(b) Si $f^{(\alpha)}$ es acotada en $[a,b]$ y continua en a, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$ y, por lo tanto, acotada.

Adicionalmente, se define el operador integral conformable, que funge como operador inverso de la derivada conformable bajo hipótesis adecuadas.

Definición 2. Para $t > 0$ y $\alpha \in (0,1]$, se define la **integral conformable de orden** α como:

$$\mathbf{I}_\alpha^a f(t) = \int_a^t x^{\alpha-1} f(x)\, dx$$

Es posible enunciar versiones análogas a los teoremas fundamentales del cálculo.

Teorema Fundamental del Cálculo.

- Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ con $a \geq 0$ una función continua y sea $\alpha \in (0,1]$. Entonces

$$T_\alpha I_\alpha^a(f)(t) = f(t)$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \geq 0$ una función diferenciable y sea $\alpha \in (0,1]$. Entonces, para todo $t \in (a,b)$, tendremos

$$I_\alpha^a T_\alpha(f)(t) = f(t) - f(a)$$

Problema de Cauchy

Sea $0 < \alpha < 1$, $0 < a < b$ y sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la ecuación diferencial conformable

$$T_\alpha y(t) = f(t, y(t)).$$

Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, buscamos una función $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y α-diferenciable en (a,b), tal que

$$T_\alpha \phi(t) = f(t, \phi(t)), \quad t \in (a,b), \quad \phi(a) = y_0.$$

Este planteamiento constituye un problema de valor inicial (PVI). Utilizando el operador integral conformable, el PVI puede reformularse de manera equivalente como una ecuación integral.

Teorema. Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y α-diferenciable en (a,b). Entonces

$$\begin{cases} T_\alpha \phi(t) = f(t, \phi(t)),\ t \in (a,b), \\ \phi(a) = y_0 \end{cases} \iff \phi(t) = y_0 + \int_a^t s^{\alpha-1} f(s, \phi(s))\, ds, \quad t \in [a,b].$$

Definimos el operador $\mathcal{F} : C([a,b]) \to C([a,b])$, con $a > 0$ y $u \in C([a,b])$, por

$$\mathcal{F}u(t) = y_0 + \int_a^t s^{\alpha-1} f(s, u(s))\, ds$$

Teorema. Sea $0 < \alpha < 1$, $0 < a < b$, y sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y globalmente Lipschitz respecto de su segunda variable, es decir $|f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u - v|$, con $K > 0$. Entonces el problema de valor inicial

$$T_\alpha \phi(t) = f(t, \phi(t)), \qquad \phi(a) = y_0,$$

posee una única solución en $[a,b]$.

Definimos la siguiente norma en $C([a,b])$:

$$\|u\|_\alpha = \max_{t \in [a,b]} \exp\left(-\frac{Kt^\alpha}{\alpha^2}\right) |u(t)|.$$

Esta norma es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$; por tanto, $C([a,b])$ es completo respecto de $\|\cdot\|_\alpha$.
Sean $u, v \in C([a,b])$.

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{F}u)(t) - (\mathcal{F}v)(t)| &\leq \int_a^t s^{\alpha-1} |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\, ds \\
&\leq \int_a^t Ks^{\alpha-1} |u(s) - v(s)|\, ds \\
&= \int_a^t Ks^{\alpha-1} \exp\left(\frac{Ks^\alpha}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{Ks^\alpha}{\alpha^2}\right) |u(s) - v(s)|\, ds \\
&\leq \|u - v\|_\alpha \int_a^t Ks^{\alpha-1} \exp\left(\frac{Ks^\alpha}{\alpha^2}\right) ds \\
&= \alpha \|u - v\|_\alpha \left[\exp\left(\frac{Kt^\alpha}{\alpha^2}\right) - \exp\left(\frac{Ka^\alpha}{\alpha^2}\right)\right] \\
&\leq \alpha \|u - v\|_\alpha \exp\left(\frac{Kt^\alpha}{\alpha^2}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $\exp\left(-\frac{Kt^\alpha}{\alpha^2}\right)$ y tomando el máximo en $t \in [a,b]$, obtenemos

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_\alpha \leq \alpha \|u - v\|_\alpha.$$

Dado que $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{F}$ es una contracción. Por el teorema del punto fijo de Banach, existe un único punto fijo de $\mathcal{F}$. Por la equivalencia anterior, dicho punto fijo es la única solución del PVI.

Conclusiones

En este trabajo se presentan versiones análogas de los teoremas fundamentales del cálculo, se plantea el problema de Cauchy asociado y se establecen condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones al problema de valor inicial (PVI). Asimismo, se introduce una norma en el espacio $C([a,b])$, bajo la cual se demuestra que el operador asociado a la ecuación integral es una contracción. En consecuencia, mediante el teorema de contracción de Banach, se garantiza la existencia y unicidad de la solución del PVI.

Referencias

[1] A. Atangana, D. Baleanu, and A. Alsaedi. New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13(1), 2015.

[2] E. A. Coddington. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1989.

[3] K. Hilal, A. Kajouni, and N. Chefnaj. Existence of Solution for a Conformable Fractional Cauchy Problem with Nonlocal Condition. *International Journal of Differential Equations*, 2022:1–9, mar 2022.

[4] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70, 7 2014.

[5] H. Kiskinov, M. Petkova, and A. Zahariev. About the Cauchy problem for nonlinear system with conformable derivatives and variable delays. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2172, page 050006. AIP Publishing LLC, 2019.

[6] G. Sales Teodoro, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas de Oliveira. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 388:195–208, 2019.

[7] V. E. Tarasov. No nonlocality. no fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 62:157–163, 2018.