


# Funciones Inframonogénicas en el Análisis de Clifford

**Daniel Alfonso Santiesteban**

# Orígenes históricos del Análisis de Clifford



Paul Dirac
1928

$$(\partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)\varphi = -m^2\varphi$$

$$\partial_{\underline{x}} = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i \partial_{x_i}$$

$$\partial_{\underline{x}}^2 = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2$$

$$\partial_{\underline{x}}\varphi = \pm im\varphi$$

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1,\ \gamma_0^2 = 1,$$
$$\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i,\ i \neq j$$

$$\partial_{\underline{x}} = \partial_{x_1}e_1 + \partial_{x_2}e_2 + ... + \partial_{x_m}e_m$$

**Análisis de Clifford**

**Producto exterior**

$$\Downarrow$$

$$a \wedge b = -b \wedge a$$

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

**Álgebras de Clifford**

$$\{e_1, e_2, ..., e_m\}$$
$$e_0^2 = 1,\ e_1^2 = e_2^2 = ... = e_m^2 = -1,$$
$$e_ie_j = -e_je_i,\ i \neq j$$
$$\{e_0; e_1, ..., e_m; e_1e_2, e_1e_3, ....; e_1...e_m\}$$

$$\mathbb{R}_{0,m}$$



Hermann Grassmann
1844



William K. Clifford
1876

# Aspectos básicos

## Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$

Sea el espacio $\mathbb{R}^m$ con la base estándar $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ sujeta a las relaciones multiplicativas

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}e_i = e_i\mathbf{1} = e_i, \quad i = 1, ..., m, \\ &e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j, i, j = 1, ..., m, \\ &e_1^2 = ... = e_m^2 = -1. \end{aligned} \tag{1}$$

La base $\mathcal{B}$ y las relaciones (1) generan una base de un álgebra asociativa, no conmutativa y $2^m$-dimensional:

$$\mathbf{1}; e_1, ..., e_m; e_1e_2, ..., e_{m-1}e_m; e_1e_2e_3, ...; e_1e_2...e_m.$$

Esta álgebra se conoce como álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$.

# Operador de Dirac y funciones monogénicas

- El operador de Dirac $\underline{\partial}$ para funciones continuamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^m$ es definido por

$$\underline{\partial} = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + e_m \frac{\partial}{\partial x_m}. \tag{2}$$

# Operador de Dirac y funciones monogénicas

- El operador de Dirac $\underline{\partial}$ para funciones continuamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^m$ es definido por

$$\underline{\partial} = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + e_m \frac{\partial}{\partial x_m}. \tag{2}$$

- Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$ es llamada *monogénica por la izquierda* (respectivamente, *monogénica por la derecha*) en $\Omega$ si $\underline{\partial}[f] = 0$ ($[f]\underline{\partial} = 0$) en $\Omega$.

# Funciones armónicas e inframonogénicas

$$f \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}), \quad \vec{u} \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3),$$

**Ecuación de Laplace**

$$\Delta f = -\underline{\partial}^2[f] = 0, \qquad \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0, \quad (3)$$

**Ecuación sándwich**[a]

$$\underline{\partial}[f]\underline{\partial} = 0, \qquad \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0. \quad (4)$$

[a] H. Malonek, D. Peña Peña and F. Sommen, Fischer decomposition by inframonogenic functions, *CUBO* **12** (2010), no. 2, 189–197.

# Inframonogenicidad en $\mathbb{R}_{0,2}$

$$f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_{12} e_1 e_2,$$

# Inframonogenicidad en $\mathbb{R}_{0,2}$

$$f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_{12} e_1 e_2,$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} = 0, \\ -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial f_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

# Inframonogenicidad en $\mathbb{R}_{0,3}$

$$f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + f_{12} e_1 e_2 + f_{13} e_1 e_3 + f_{23} e_2 e_3 + f_{123} e_1 e_2 e_3,$$

# Inframonogenicidad en $\mathbb{R}_{0,3}$

$$f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + f_{12} e_1 e_2 + f_{13} e_1 e_3 + f_{23} e_2 e_3 + f_{123} e_1 e_2 e_3,$$

$$\begin{cases}
-\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_3^2} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3} - 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 f_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - 2\frac{\partial^2 f_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_{13}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_{13}}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\frac{\partial^2 f_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_{23}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_{23}}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\frac{\partial^2 f_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\
-\frac{\partial^2 f_{123}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f_{123}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f_{123}}{\partial x_3^2} = 0.
\end{cases} \tag{6}$$

Sistema de Lamé-Navier

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\vec{u} := \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\underline{\partial}[\vec{u}]\underline{\partial} + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\underline{\partial}^2[\vec{u}] = 0$$

Fórmula integral de Cauchy

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}_\Gamma^r f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}_\Gamma^{\text{infra}}[f]\underline{\partial})(\underline{x}),\ \underline{x} \in \Omega$$





$$\underline{\partial}[f]\underline{\partial} = 0$$

Descomposición de Fischer por la H-acción

$$\ker_k^s \tilde{\Delta} = \mathcal{H}_k^s \oplus x \wedge \mathcal{H}_{k-1}^{s-1} \oplus x \bullet \mathcal{H}_{k-1}^{s+1} \oplus \widetilde{\mathcal{W}}_k^s,$$
$$\widetilde{\mathcal{W}}_k^s = ((c_1+1)c_2 x \wedge x \bullet + (c_2+1)c_1 x \bullet x \wedge)\mathcal{H}_{k-2}^s$$

Descomposición de tipo Almansi

$$\Delta f,\ m = 2k+1,$$
$$f = f_1 + f_2 + f_3\underline{x} + \underline{x}f_4$$
$$\underline{\partial}[f_1] = [f_2]\underline{\partial} = 0$$
$$\underline{\partial}[f_3] = [f_3]\underline{\partial} = \underline{\partial}[f_4] = [f_4]\underline{\partial} = 0$$





Conjuntos de unicidad

$$m = 2k+1,\ u \in C^2(B_r) \cap C^1(\overline{B_r}),$$
$$\begin{cases} \underline{\partial}[u]\underline{\partial} = 0 & en\ B_r \\ u = f & en\ \partial B_r \end{cases}$$

Bases ortogonales cuadrado integrables en la esfera

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{6n+3} a_{n,j}B_{n,j},$$
$$\mathcal{B}_n = \{X_{n,m}^{\pm}\}_m \cup \{Y_{n,m}^{\pm}\}_m \cup \{Z_{n,m}^{\pm}\}_m,$$
$$\mathcal{B}_n = \{B_{n,j} : 1 \le j \le 6n+3\}$$





# Funciones inframonogénicas en la elasticidad lineal

Sistema de Lamé-Navier:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = 0. \tag{7}$$

Reescritura de (7) en Análisis de Clifford:

$$\left( \frac{\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial}[\vec{u}]\underline{\partial} + \left( \frac{3\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial}^2[\vec{u}] = 0. \tag{8}$$

- Cualquier solución $\vec{u}$ de (7) admite la representación $\vec{u} = \vec{h} + \vec{i}$, donde $\vec{h}$ es un campo vectorial armónico e $\vec{i}$ es uno inframonogénico. Además, la anterior descomposición es única salvo un campo vectorial que sea simultáneamente armónico e inframonogénico.

# Funciones inframonogénicas en la elasticidad lineal

Sistema de Lamé-Navier:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = 0. \tag{7}$$

Reescritura de (7) en Análisis de Clifford:

$$\left( \frac{\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial}[\vec{u}]\underline{\partial} + \left( \frac{3\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial}^2[\vec{u}] = 0. \tag{8}$$

- Cualquier solución $\vec{u}$ de (7) admite la representación $\vec{u} = \vec{h} + \vec{i}$, donde $\vec{h}$ es un campo vectorial armónico e $\vec{i}$ es uno inframonogénico. Además, la anterior descomposición es única salvo un campo vectorial que sea simultáneamente armónico e inframonogénico.
- Para cualquier campo vectorial armónico $\vec{h}$, existe uno inframonogénico $\vec{i}$ tal que $\vec{h} + \vec{i}$ resuelve (7) y viceversa.

# Descomposición de Fischer

*Dado un polinomio homogéneo $q(\underline{x})$, con $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, todo polinomio homogéneo $P_k(\underline{x})$ de grado $k$ admite una descomposición única de la forma*

$$P_k(\underline{x}) = Q_k(\underline{x}) + q(\underline{x})R(\underline{x}), \qquad (9)$$

*donde $Q_k(\underline{x})$ es un polinomio homogéneo de grado $k$ que satisface $q(\underline{\partial})Q_k = 0$ y $R(\underline{x})$ es un polinomio homogéneo de un grado adecuado.*[1]



[1] E. Fischer, Uber die Differentiationsprozesse der Algebra, *J. für Math.* **148** (1917), 1–78.

# Algunas descomposiciones de Fischer

$$q(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 \Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{p=0}^{\infty} r^{2p} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \qquad (10)$$

# Algunas descomposiciones de Fischer

$$q(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 \Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{p=0}^{\infty} r^{2p} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \tag{10}$$

$$q(\underline{x}) = \underline{x} \Rightarrow \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}) = \bigoplus_{j=1}^{k} \underline{x}^j \mathcal{M}_{k-j}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}) \tag{11}$$

# Algunas descomposiciones de Fischer

$$q(\underline{x}) = |\underline{x}|^2 \Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{p=0}^{\infty} r^{2p} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \tag{10}$$

$$q(\underline{x}) = \underline{x} \Rightarrow \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}) = \bigoplus_{j=1}^{k} \underline{x}^j \mathcal{M}_{k-j}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}) \tag{11}$$

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}) = \bigoplus_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \underline{x}^j \mathcal{I}_{k-2j}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}) \underline{x}^{ja} \tag{12}$$

[a] H. Malonek, D. Peña Peña and F. Sommen, Fischer decomposition by inframonogenic functions, *CUBO* **12** (2010), no. 2, 189-197.

# Operadores de Dirac generalizados

Sea $\vartheta := \{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_m\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. En la clase de funciones $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, donde $\Omega$ es un dominio abierto de $\mathbb{R}^m$, se definen:

$$ {}^{\vartheta}\underline{\partial}[f] := \sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad [f]^{\vartheta}\underline{\partial} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \vartheta_i, \tag{13} $$

como los operadores de Dirac con respecto al conjunto estructural $\vartheta$.

# Operadores de Dirac generalizados

Sea $\vartheta := \{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_m\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. En la clase de funciones $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, donde $\Omega$ es un dominio abierto de $\mathbb{R}^m$, se definen:

$$ {}^{\vartheta}\underline{\partial}[f] := \sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad [f]^{\vartheta}\underline{\partial} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \vartheta_i, \tag{13} $$

como los operadores de Dirac con respecto al conjunto estructural $\vartheta$.

$$ {}^{\vartheta}\underline{\partial}\,{}^{\vartheta}\underline{\partial}[f] = [f]^{\vartheta}\underline{\partial}\,^{\vartheta}\underline{\partial} = -\Delta f $$

# Funciones $(\nu, \vartheta)$-inframonogénicas

## Función $(\nu, \vartheta)$-inframonogénica

Se dice que la función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es $(\nu, \vartheta)$-inframonogénica en el dominio $\Omega$ si

$$ {}^{\nu}\underline{\partial}[f]^{\vartheta}\underline{\partial} = 0 \text{ en } \Omega. $$

*a*

---

[a] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya and M. Árciga Alejandre, On $(\varphi, \psi)$-Inframonogenic Functions in Clifford Analysis, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series* **53**-2 (2022), 605-621, https://doi.org/10.1007/s00574-021-00273-6.

D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya and M. Árciga Alejandre, On a generalized Lamé-Navier system in $\mathbb{R}^3$, *Math. Slovaca* **72**-6 (2022), 1527-1540, https://doi.org/10.1515/ms-2022-0104.

# Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \underline{\partial}[f]\underline{\partial} = 0 & \text{en } \Omega, \\ f = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$



Consideremos el dominio elipsoidal

$$\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : (m-1)x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 < 1\}$$

y el polinomio

$$f(\underline{x}) = [(m-1)x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 - 1]e_1.$$

Obviamente, $f|_{\partial\Omega} = 0$ y después de algunos cálculos se obtiene que $\underline{\partial}[f(\underline{x})]\underline{\partial} = 0$ en $\Omega$. Es decir, $f(\underline{x})$ es una solución no trivial al problema de Dirichlet homogéneo.

- Si $m$ es impar y $g \in \mathrm{Lip}(1+\alpha, \partial\mathbb{B})$, entonces la función

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2}(1-|\underline{x}|^2)\Psi(\underline{\partial}\mathcal{P}[g]\underline{\partial}) + \mathcal{P}[g](\underline{x}) \tag{14}$$

es la única solución del problema de Dirichlet para funciones inframonogénicas en la bola unitaria $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^m$. En este caso,

$$\Psi(a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{m-2k}[a]_k, \tag{15}$$

y

$$\mathcal{P}[g](\underline{x}) = \frac{1}{\sigma_m}\int_{\partial\mathbb{B}} \frac{1-|\underline{x}|^2}{|\underline{y}-\underline{x}|^m} g(\underline{y})d\underline{y} \tag{16}$$

es la integral de Poisson.

- La solución (14) es válida para el problema de Dirichlet en cualquier dimensión $m$, excepto cuando $m = 2k$ y $[g]_k \neq 0$. En este caso el operador $\Psi$ no está definido y el método falla.

- La solución (14) es válida para el problema de Dirichlet en cualquier dimensión $m$, excepto cuando $m = 2k$ y $[g]_k \neq 0$. En este caso el operador $\Psi$ no está definido y el método falla.
- Sea $g \in C(\partial\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{2k}, \mathbb{R}^{(k)}_{0,m})$, el problema de Dirichlet tiene una solución en $C^2(\mathbb{B}) \cap C^1(\overline{\mathbb{B}})$ si y solo si

$$\underline{\partial}(\mathcal{P}[g])\underline{\partial} = 0.$$

- La solución (14) es válida para el problema de Dirichlet en cualquier dimensión $m$, excepto cuando $m = 2k$ y $[g]_k \neq 0$. En este caso el operador $\Psi$ no está definido y el método falla.
- Sea $g \in C(\partial\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{2k}, \mathbb{R}^{(k)}_{0,m})$, el problema de Dirichlet tiene una solución en $C^2(\mathbb{B}) \cap C^1(\overline{\mathbb{B}})$ si y solo si

$$\underline{\partial}(\mathcal{P}[g])\underline{\partial} = 0.$$

- Tomemos $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^4$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} \underline{\partial}[f]\underline{\partial} = 0 & \text{en } \mathbb{B}, \\ f = (x_1^2 - x_2^2)e_1 e_3 & \text{sobre } \partial\mathbb{B}. \end{cases}$$

Un simple cálculo muestra que la función dato es armónica pero no inframonogénica. Este problema no tiene solución, incluso en la clase $C^2(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}})$.

ELSEVIER

Journal of Differential Equations

Volume 364, 15 August 2023, Pages 498-520



# On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball

Arsenio Moreno García [a] ✉, Daniel Alfonso Santiesteban [b] ✉,
Ricardo Abreu Blaya [b c] ✉

Show more

+ Add to Mendeley  Share  Cite

https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.03.050 ↗

Get rights and content ↗

# Problemas de frontera bien planteados[2]

- **Problema A**. Dado el campo $f_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$, encontrar todas las soluciones en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de la ecuación

$$\underline{\partial}[F_k]\underline{\partial} = f_k, \tag{17}$$

con condiciones de frontera

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{18}$$

[2] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes, Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space, *Math. Meth. Appl. Sci.* **46** (2023), 15784–15798.

# Problemas de frontera bien planteados[2]

- **Problema A**. Dado el campo $f_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$, encontrar todas las soluciones en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de la ecuación

$$\underline{\partial}[F_k]\underline{\partial} = f_k, \tag{17}$$

con condiciones de frontera

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{18}$$

- **Problema B**. Encontrar todas las soluciones en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de (17), con condiciones de frontera:

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{19}$$

[2] D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes, Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space, *Math. Meth. Appl. Sci.* **46** (2023), 15784–15798.

# Productos interior y exterior

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \left\{ a \in \mathbb{R}_{0,m} : a = \sum_{|A|=k} a_A e_A, a_A \in \mathbb{R} \right\}$$

$$nF_k = [nF_k]_{k-1} + [nF_k]_{k+1} \tag{20}$$

$$[nY_k]_{k-1} = \frac{1}{2}[nF_k - (-1)^k F_k n] =: n \cdot F_k$$

$$[nF_k]_{k+1} = \frac{1}{2}[nF_k + (-1)^k F_k n] =: n \wedge F_k$$

$$\underline{\partial}[F_k] = \underline{\partial} \cdot F_k + \underline{\partial} \wedge F_k \tag{21}$$

$$\underline{\partial} \cdot F_k = \frac{1}{2}[\underline{\partial} F_k - (-1)^k F_k \underline{\partial}] = [\underline{\partial} F_k]_{k-1}$$

$$\underline{\partial} \wedge F_k = \frac{1}{2}[\underline{\partial} F_k + (-1)^k F_k \underline{\partial}] = [\underline{\partial} F_k]_{k+1}$$

# Operadores del tipo sándwich

$$\underline{\partial}[F_k]\underline{\partial} = (-1)^k(\underline{\partial}\cdot\underline{\partial}\wedge F_k - \underline{\partial}\wedge\underline{\partial}\cdot F_k) \tag{22}$$

$$\begin{aligned}{}^{\nu}\underline{\partial}[F_k]{}^{\vartheta}\underline{\partial} = (-1)^k(&\underbrace{{}^{\nu}\underline{\partial}\cdot{}^{\vartheta}\underline{\partial}\wedge F_k - {}^{\nu}\underline{\partial}\wedge{}^{\vartheta}\underline{\partial}\cdot F_k}_{k-vector} - \underbrace{{}^{\nu}\underline{\partial}\cdot{}^{\vartheta}\underline{\partial}\cdot F_k}_{(k-2)-vector}\\ &+\underbrace{{}^{\nu}\underline{\partial}\wedge{}^{\vartheta}\underline{\partial}\wedge F_k}_{(k+2)-vector})\end{aligned} \tag{23}$$

# Proposiciones fundamentales

## Proposición 5

Si $F_k(\underline{x})$ es la solución del Problema A, entonces las funciones $\varphi(\underline{x}) = \underline{\partial} \wedge F_k(\underline{x})$ y $\psi(\underline{x}) = \underline{\partial} \cdot F_k(\underline{x})$ serán la solución en $\Omega$ del sistema

$$\begin{aligned} \underline{\partial} \wedge \psi(\underline{x}) - \underline{\partial} \cdot \varphi(\underline{x}) &= (-1)^{k+1} f_k(\underline{x}), \\ \underline{\partial} \cdot \psi(\underline{x}) &= 0, \\ \underline{\partial} \wedge \varphi(\underline{x}) &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n \wedge \varphi)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{25}$$

y la siguiente condición integral

$$\int_{\Omega} \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \tag{26}$$

Inversamente, si $\varphi$ y $\psi$ son las soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (24), satisfaciendo (25) o (25)-(26) cuando $k = m - 1$, entonces el campo $k$-vectorial $F_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, satisfaciendo en $\Omega$ el sistema

$$\underline{\partial} \cdot F_k(\underline{x}) = \psi(\underline{x}), \quad \underline{\partial} \wedge F_k(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}), \tag{27}$$

con

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{28}$$

será la solución del Problema A.

## Proposición 6

Si $F_k(\underline{x})$ es la solución del Problema B, entonces las funciones $\varphi(\underline{x}) = \underline{\partial} \wedge F_k(\underline{x})$ y $\psi(\underline{x}) = \underline{\partial} \cdot F_k(\underline{x})$ serán la solución en $\Omega$ del sistema (24) satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n \cdot \psi)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{29}$$

y la siguiente condición integral

$$\int_{\Omega} \psi(\underline{x}) d\underline{x} = 0. \tag{30}$$

Inversamente, si $\varphi$ y $\psi$ son las soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (24), satisfaciendo (29) o (29)-(30) cuando $k = 1$, entonces el campo $k$-vectorial $F_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, satisfaciendo en $\Omega$ el sistema (27) con

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{31}$$

será la solución del Problema B.

## Teorema 5

Sea $f_k(\underline{x}) \in L^p(\Omega)$ con $p > 1$. Entonces, los problemas A y B son únicamente solubles y sus soluciones están representadas por un operador integral lineal compacto en $L^p(\Omega)$.

## Teorema 5

Sea $f_k(\underline{x}) \in L^p(\Omega)$ con $p > 1$. Entonces, los problemas A y B son únicamente solubles y sus soluciones están representadas por un operador integral lineal compacto en $L^p(\Omega)$.

## Observación 1

El resultado enunciado en Teorema 5 es también válido si se sustituye el operador sándwich en los problemas por el operador de Laplace. En los casos límites cuando $k = 0$ o $k = m$, los problemas se reducen a problemas de Dirichlet o Neumann para una ecuación de Poisson.

# Propiedades espectrales

Sean $F_k$ y $G_k$ campos $k$-vectoriales en $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Si proveemos el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ con el producto interior real

$$\langle u, v\rangle = \left[\int_\Omega \overline{u(\underline{x})}v(\underline{x})d\underline{x}\right]_0.$$

Es fácil ver que si $F_k$ y $G_k$ satisfacen las condiciones (18) o (19) entonces

$$\langle \underline{\partial}[F_k]\underline{\partial}, G_k\rangle = \langle F_k, \underline{\partial}[G_k]\underline{\partial}\rangle. \tag{32}$$

Como consecuencia se concluye que las funciones propias de los problemas espectrales son soluciones de una ecuación simétrica de Fredholm

$$F_k(\underline{x}) - \eta\int_\Omega K(\underline{x},\underline{y})F_k(\underline{y})d\underline{y} = 0. \tag{33}$$

# Un enfoque no estándar

## Teorema 7

Si $F_k(\underline{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es una solución del siguiente sistema

$$({}^{\nu}\underline{\partial} \wedge {}^{\vartheta}\underline{\partial} \cdot F_k - {}^{\nu}\underline{\partial} \cdot {}^{\vartheta}\underline{\partial} \wedge F_k)|_{\Omega} = f_k, \tag{34}$$

$$(n_{\vartheta} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{35}$$

$$({}^{\vartheta}\underline{\partial} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{36}$$

entonces las funciones $\varphi(\underline{x}) = {}^{\vartheta}\underline{\partial} \wedge F_k(\underline{x})$ y $\psi(\underline{x}) = {}^{\vartheta}\underline{\partial} \cdot F_k(\underline{x})$ serán una solución en $\Omega$ del sistema

$${}^{\nu}\underline{\partial} \wedge \psi(\underline{x}) - {}^{\nu}\underline{\partial} \cdot \varphi(\underline{x}) = f_k(\underline{x}), \quad {}^{\vartheta}\underline{\partial} \cdot \psi(\underline{x}) = 0, \quad {}^{\vartheta}\underline{\partial} \wedge \varphi(\underline{x}) = 0, \tag{37}$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (n_\vartheta \wedge \varphi)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{38}$$

y la misma condición integral (26). Aquí, $n_\vartheta = \sum_{i=1}^{m} n_i \vartheta^i$ y $n_i$ es la $i$-ésima componente del vector normal unitario exterior sobre $\partial\Omega$. Inversamente, si $\varphi$ y $\psi$ son las soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (37), satisfaciendo las condiciones de frontera (38) o (38)-(26) cuando $k = 1$, entonces el campo $k$-vectorial $F_k$, satisfaciendo en $\Omega$ el sistema

$$^{\vartheta}\underline{\partial} \cdot F_k(\underline{x}) = \psi(\underline{x}), \quad ^{\vartheta}\underline{\partial} \wedge F_k(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}), \tag{39}$$

con

$$(n_\vartheta \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{40}$$

será una solución del sistema (34)-(35)-(36).

# Problemas mal planteados bajo conjuntos estructurales no equivalentes

$$\begin{cases} {}^{\nu}\underline{\partial} \wedge \psi(\underline{x}) &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ {}^{\vartheta}\underline{\partial} \cdot \psi(\underline{x}) &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \psi(\underline{x}) &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{41}$$

$$\nu = \{e_2, -e_1, e_4, -e_3\},$$
$$\vartheta = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$\psi(\underline{x}) = (|\underline{x}|^2 - 1)(x_2 e_1 - x_1 e_2 + x_4 e_3 - x_3 e_4),$$
$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 1\}.$$

Mathematical Methods in the Applied Sciences

RESEARCH ARTICLE

# Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space

Daniel Alfonso Santiesteban, Ricardo Abreu Blaya, Juan Bory Reyes

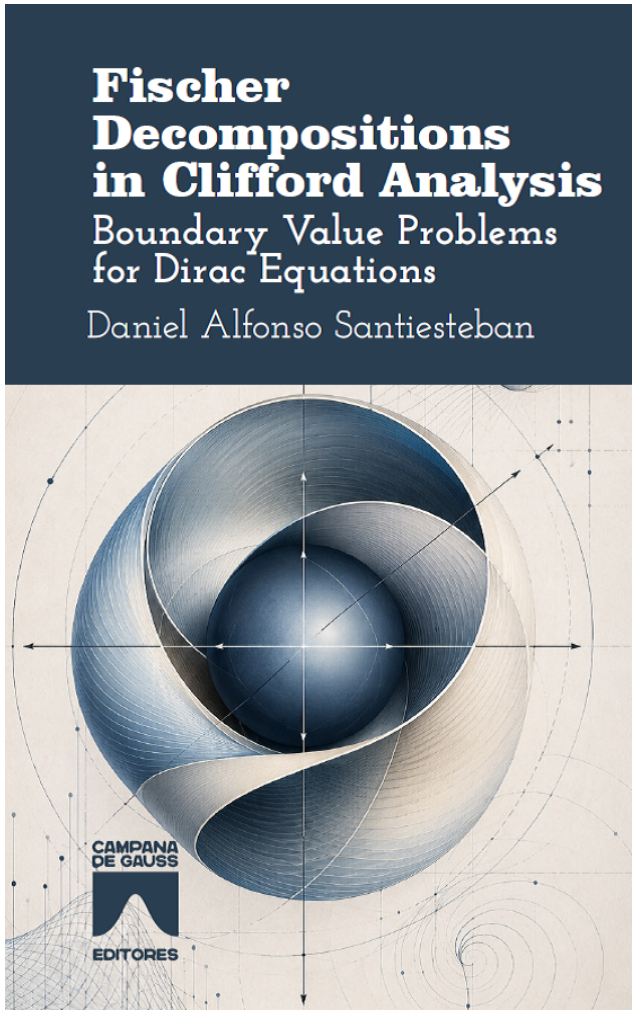
First published: 02 June 2023 | https://doi.org/10.1002/mma.9426 | Citations: 7

Read the full text > PDF TOOLS SHARE

## Abstract

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ be a bounded regular domain, let $\partial_x$ be the standard Dirac operator in $\mathbb{R}^m$, and let $\mathbb{R}_{0,m}$ be the Clifford algebra constructed over the quadratic space $\mathbb{R}^{0,m}$. For $k \in \{1, \ldots, m\}$ fixed, $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denotes the space of $k$-vectors in $\mathbb{R}_{0,m}$. In the framework of Clifford analysis, we consider two boundary value problems for a second-order elliptic system of partial differential equations of the form $\partial_x F_k \partial_x = f_k$ in $\Omega$, where $f_k$ is a smooth $k$-vector valued function. The boundary conditions of the problems contain the inner and outer products of the $k$-vector solution $F_k$ with both the Dirac operator and the

## Un enfoque no estándar




https://www.amazon.com/dp/b0h6zqhpm4




Vol. 19 Núm. 1 (2026)

Generalizaciones de las funciones inframonogénicas en el análisis de Clifford

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Publicado 2026-01-29

Daniel Alfonso Santiesteban, Ricardo Abreu Blaya, Juan Bory Reyes

https://doi.org/10.61820/dcuqa.2395-8847.1735

ISSN 0370-3908 - eISSN 2382-4980
Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales



Vol. 48 Núm. 188 (2024)

# Reconstrucción de campos multivectoriales a partir del análisis de Clifford

MATEMÁTICAS

Publicado 2024-08-06

Ricardo Abreu-Blaya[+], Juan Bory-Reyes[+], Tania Moreno-García[+], Daniel Alfonso-Santiesteban[+]

https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Publicaciones e Investigación
Revista Especializada en Ingeniería

e-Hemeroteca Acerca de Indexada en Políticas Actual Números Contacto ES

Inicio / Archivos / Vol. 18 Núm. 1 (2024) / Articulo de Reflexión




Vol. 18 Núm. 1 (2024)
**Publicado** 27-01-2024

Articulo de Reflexión

# Generalizaciones del operador de Lamé-Navier en análisis de Clifford

DOI: https://doi.org/10.22490/25394088.7583

**Daniel Alfonso Santiesteban**
Universidad Autónoma de Guerrero

**Diego Esteban Gutierrez Valencia**
Universidad Autónoma de Guerrero

**Ricardo Abreu Blaya**
Universidad Autónoma de Guerrero

**Yudier Peña Pérez**
Universidad Autónoma de Guerrero

PDF XML

https://doi.org/10.22490/25394088.7583

## Un enfoque no estándar



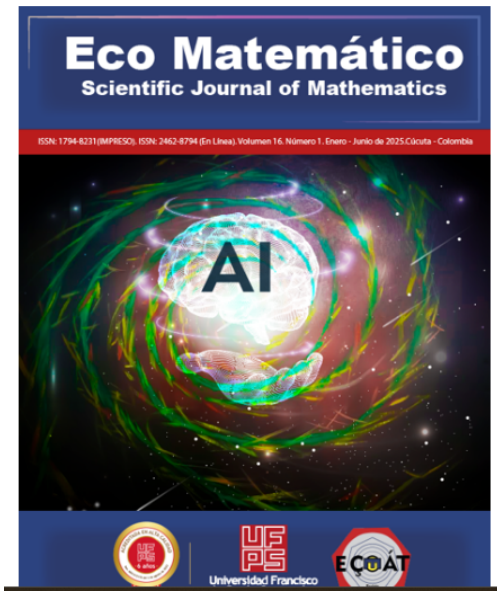

https://doi.org/10.5281/zenodo.17154974

## Un enfoque no estándar

Funciones Inframonogénicas Generalizadas en Análisis de Clifford

Generalized Inframonogenic Functions in Clifford Analysis

Check for updates




**Daniel Alfonso-Santiesteban**
Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, México
https://orcid.org/0000-0003-0248-3942

**Resumen**

El Análisis de Clifford se centra en las llamadas funciones monogénicas, que pueden interpretarse como generalizaciones de las funciones holomorfas del plano complejo. Debido a la no conmutatividad del producto en las álgebras de Clifford surgen las funciones inframonogénicas, cuya teoría amplía de manera natural este marco analítico. Asimismo, la consideración de bases ortonormales arbitrarias en el operador de Dirac da lugar a una nueva subclase de funciones biarmónicas que generaliza a las funciones inframonogénicas. En este trabajo se presentan algunos de los principales resultados obtenidos para estas funciones más generales. Entre ellos destacan la fórmula integral de tipo Cauchy, el problema del salto, el sistema de Lamé-Navier y la representación aditiva de sus desplazamientos, así como la

https://doi.org/10.22463/17948231.4613

# Algunas referencias



R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Moreno García and T. Moreno García, A Cauchy integral formula for infrapolymonogenic functions in Clifford analysis, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **30** (2020), no. 21, 17 pp.

# Algunas referencias




R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Moreno García and T. Moreno García, A Cauchy integral formula for infrapolymonogenic functions in Clifford analysis, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **30** (2020), no. 21, 17 pp.



F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford analysis*, Research Notes in Mathematics **76**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, 1982.

# Algunas referencias


- R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Moreno García and T. Moreno García, A Cauchy integral formula for infrapolymonogenic functions in Clifford analysis, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **30** (2020), no. 21, 17 pp.
- F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford analysis*, Research Notes in Mathematics **76**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, 1982.
- R. Delanghe, F. Sommen and V. Souček, *Clifford Algebras and Spinor-Valued Functions, A Funtion Theory for the Dirac Operator*, Springer-Science+Business Media, B.V., 1992.

# Algunas referencias


- R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Moreno García and T. Moreno García, A Cauchy integral formula for infrapolymonogenic functions in Clifford analysis, *Adv. Appl. Clifford Algebr*. **30** (2020), no. 21, 17 pp.
- F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford analysis*, Research Notes in Mathematics **76**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, 1982.
- R. Delanghe, F. Sommen and V. Souček, *Clifford Algebras and Spinor-Valued Functions, A Funtion Theory for the Dirac Operator*, Springer-Science+Business Media, B.V., 1992.
- B. B. Delgado and J. E. Macías Díaz, An Exterior Neumann Boundary-Value Problem for the Div-Curl System and Applications, *Mathematics* **9** (2021), no. 14, 1609.



F. M. Denaro, On the application of the Helmholtz–Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **43** (2003), 43–69.

- F. M. Denaro, On the application of the Helmholtz–Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **43** (2003), 43–69.
- D. C. Dinh, On Structure of Inframonogenic Functions, *Adv. Appl. Clifford Algebr*. **31** (2021), no. 50, 9 pp.

- F. M. Denaro, On the application of the Helmholtz–Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **43** (2003), 43–69.
- D. C. Dinh, On Structure of Inframonogenic Functions, *Adv. Appl. Clifford Algebr*. **31** (2021), no. 50, 9 pp.
- A. Dzhuraev, *Methods of Singular Integral Equation*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **60**. Longman Scientific & Technical, Harlow; co-published in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

Muchas Gracias

danielalfonso950105@gmail.com