



# Punto fijo y el espectro afín

Dr. rer. nat. Russell Aarón Quiñones Estrella

Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas
FCFM



# Índice



1 Introducción

2 Teorema de comparación y consecuencias

3 Subespcios invariantes

4 Iteraciones

# El inicio...

**Teorema (Brouwer, 1912)**

Toda función continua $f : D^2 \longrightarrow D^2$ posee un punto fijo, es decir, existe $p \in D^2$ con $f(p) = p$.





# Análisis matemático



## Principio de contracción (Banach, 1922)

Si $(X, d)$ es un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ es una contracción entonces $f$ tiene un punto fijo. Mas aún, dicho punto fijo $p \in X$ es único y para cualquier $x \in X$, la sucesión $(f^m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $p$.



# Análisis matemático



## Principio de contracción (Banach, 1922)

Si $(X, d)$ es un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ es una contracción entonces $f$ tiene un punto fijo. Mas aún, dicho punto fijo $p \in X$ es único y para cualquier $x \in X$, la sucesión $(f^m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $p$.

**Nota:** $f$ es contracción si existe $0 \leq k < 1$ de tal modo que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo par $x, y \in X$.



# Análisis matemático



## Principio de contracción (Banach, 1922)

Si $(X, d)$ es un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ es una contracción entonces $f$ tiene un punto fijo. Mas aún, dicho punto fijo $p \in X$ es único y para cualquier $x \in X$, la sucesión $(f^m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $p$.

## Corolario

Toda contración $f : X \longrightarrow X$ de un espacio métrico compacto $(X, d)$ posee un punto fijo.

**Nota:** $f$ es contracción si existe $0 \leq k < 1$ de tal modo que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo par $x, y \in X$.



# Análisis funcional



**Teorema (Browder-Göhde-Kirk,1965)**

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (uniformemente convexo) y $\emptyset \neq K \subset V$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Todo operador no expansivo $f : K \longrightarrow K$ posee un punto fijo.



# Análisis funcional



**Teorema (Browder-Göhde-Kirk,1965)**

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (uniformemente convexo) y $\emptyset \neq K \subset V$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Todo operador no expansivo $f : K \longrightarrow K$ posee un punto fijo.

**Nota:** $f$ es no expansivo si $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - x\|$ para todo par $x, y \in K$.





¿Y en otras áreas?





¿Y en otras áreas?

¿En geometría algebraica?





¿Y en otras áreas?

¿En geometría algebraica?

**Recuerde...**

- Si $R$ es un anillo conmutativo y unitario, $\mathrm{Spec}(R)$ denota al conjunto de todos los ideales primos de $R$.
- Si $I \leq R$ es un ideal entonces $V(I)$ denota al conjunto de todos los ideales primos de $R$ que contienen a $I$.





**Topología de Zariski (Groethendieck, 1960)**

Para un anillo $R$, la colección $\{V(I) : I \leq R$ es un ideal $\}$ determina los cerrados de una topología, llamada la topología de Zariski.





**Topología de Zariski (Groethendieck, 1960)**

Para un anillo $R$, la colección $\{V(I) : I \leq R$ es un ideal $\}$ determina los cerrados de una topología, llamada la topología de Zariski.

**Nota:**

- O. Zariski 1940: Solo para conjuntos algebraicos
- J.P. serre 1955: Para variedades abstractas en *Faisceaux Algébriques Cohérents*
- A. Groethendieck 1960: Versión actual en EGA.



# Morfismos



Ya se tiene un espacio topológico: Spec($R$) dotado de la topología de Zariski.



# Morfismos



Ya se tiene un espacio topológico: Spec($R$) dotado de la topología de Zariski.

¿Y los morfismos?



# Morfismos



Ya se tiene un espacio topológico: Spec($R$) dotado de la topología de Zariski.

¿Y los morfismos?

**Definición/Proposición**

Todo morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ define una función ${}^a\varphi : \text{Spec}(S) \longrightarrow \text{Spec}(R)$ continua mediante ${}^a\varphi(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.
A la clase de las funciones del tipo ${}^a\varphi$ se le denotará por $\mathcal{C}$.

**Nota:** Todo morfismo $\varphi : R \longrightarrow S$ de anillos satisface $\varphi(1) = 1$.



# Ejemplos triviales



- Si $R$ es un campo entonces $\mathrm{Spec}(R) = *$ y así *toda* función continua $f : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ tiene un punto fijo.
- $(R, \mathfrak{m})$ anillo local, todo morfismo $\varphi : R \longrightarrow R$ es tal que la inducida ${}^a\varphi$ tiene un punto fijo.



# Índice



1 Introducción

2 Teorema de comparación y consecuencias

3 Subespcios invariantes

4 Iteraciones



# Comparación implica punto fijo



**Teorema (de comparación)**

Sea $R$ un anillo y $\varphi : R \longrightarrow R$ un morfismo de anillos. Las siguientes son equivalentes.

1. Existe $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_0) \subset \mathfrak{p}_0$;
2. Existe $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_0) \supset \mathfrak{p}_0$;
3. ${}^a\varphi$ posee un punto fijo.





**Corolario**

Cada una de las siguientes condiciones sobre $R$ implican que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.





**Corolario**

Cada una de las siguientes condiciones sobre $R$ implican que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

- $R$ es un dominio entero.





**Corolario**

Cada una de las siguientes condiciones sobre $R$ implican que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

- $R$ es un dominio entero.
- $R$ es un anillo local.





**Corolario**

Cada una de las siguientes condiciones sobre $R$ implican que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

- $R$ es un dominio entero.
- $R$ es un anillo local.
- $R$ es un anillo de valuación discreta.





**Corolario**

Cada una de las siguientes condiciones sobre $R$ implican que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

- $R$ es un dominio entero.
- $R$ es un anillo local.
- $R$ es un anillo de valuación discreta.

**Corolario**

Para cualquier anillo $R$ y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ se tiene que $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.





**Teorema**

Sean $R_1, R_2$ dos anillos. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $\mathrm{Spec}(R_1 \times R_2)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.
2. Ambos de $\mathrm{Spec}(R_1)$ y $\mathrm{Spec}(R_2)$ tienen la $\mathcal{C}$-ppf.
3. Al menos uno de $\mathrm{Spec}(R_1)$ y $\mathrm{Spec}(R_2)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.





**Teorema**

Para cualquier anillo $R$ se tiene que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.





**Teorema**

Para cualquier anillo $R$ se tiene que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

Dem. $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf





**Teorema**

Para cualquier anillo $R$ se tiene que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

Dem. $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf
por tanto $\mathrm{Spec}(\mathbb{C} \times R)$ la tiene,





**Teorema**

Para cualquier anillo $R$ se tiene que $\mathrm{Spec}(R)$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf.

Dem. $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ tiene la $\mathcal{C}$-ppf
por tanto $\mathrm{Spec}(\mathbb{C} \times R)$ la tiene,
por tanto $\mathrm{Spec}(R)$ la tiene.



# Índice



1 Introducción

2 Teorema de comparación y consecuencias

3 Subespcios invariantes

4 Iteraciones



# Subespacios invariantes



## Proposición

Sea $\varphi : R \longrightarrow R$ un morfismo de anillos y $f \in R$

- Para cada $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec}(R)$ punto fijo de ${}^a\varphi$ se tiene que el subespacio cerrado $V(\mathfrak{p}_0)$ es ${}^a\varphi$-invariante.



# Subespacios invariantes



## Proposición

Sea $\varphi : R \longrightarrow R$ un morfismo de anillos y $f \in R$

- Para cada $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec}(R)$ punto fijo de ${}^a\varphi$ se tiene que el subespacio cerrado $V(\mathfrak{p}_0)$ es ${}^a\varphi$-invariante.
- Todo subconjunto cerrado, propio y no vacío $K \subset \mathrm{Spec}(R)$ que sea ${}^a\varphi$-invariante, contiene un punto fijo para ${}^a\varphi$.



# Subespacios invariantes



## Proposición

Sea $\varphi : R \longrightarrow R$ un morfismo de anillos y $f \in R$

- Para cada $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec}(R)$ punto fijo de ${}^a\varphi$ se tiene que el subespacio cerrado $V(\mathfrak{p}_0)$ es ${}^a\varphi$-invariante.
- Todo subconjunto cerrado, propio y no vacío $K \subset \mathrm{Spec}(R)$ que sea ${}^a\varphi$-invariante, contiene un punto fijo para ${}^a\varphi$.
- Si $D(f) := \mathrm{Spec}(R) - V(f)$ es ${}^a\varphi$-invariante entonces $D(f)$ contiene un punto fijo para ${}^a\varphi$.



# Índice



1 Introducción

2 Teorema de comparación y consecuencias

3 Subespcios invariantes

4 Iteraciones



# Iteraciones



**Teorema**

Sea $\varphi : R \longrightarrow R$ un morfismo de anillos y denote por $K_n$ el kernel of la composición $\varphi^n$. Suponga que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $K_{n_0} \in \mathrm{Spec}(R)$. La función inducida ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ tiene entonces un punto fijo dado por $\mathfrak{p} = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.





Muchas gracias por su atención